愛知県高等学校数学研究会
数学科教育情報委員会

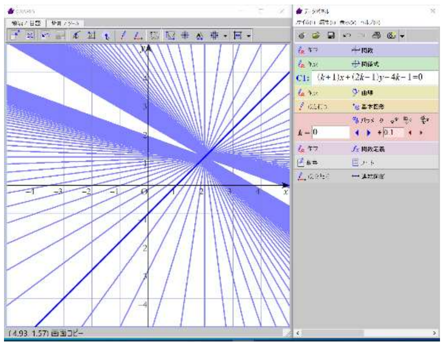
数学Ⅱ「交点を通る図形の方程式」における数学的探究活動
～ICT を利用して仮説を立て、数式を用いて検証する～

問題 k は定数とする。方程式 $(k+1)x+(2k-1)y-4k-1=0$ は，k の値に関係なく定点を通る。その定点の座標を求めよ。

解答例 k について整理すると $(x+2y-4)k+(x-y-1)=0$
これが任意の k について成り立つので　k についての恒等式とみると
$x+2y-4=0$ かつ $x-y-1=0$ が成り立つ。
これを解いて $x=2$，$y=1$　　　よって　(2，1)

1　はじめに

上記の問題は、交点を通る図形の方程式の基本問題である。しかし、上に示した 解答例 のように式変形することはできても、問題の意味や図形的な考察ができない生徒が多いと感じる。そこで、関数グラフソフト GRAPES を利用することにより、方程式を連続的に変化する図形として視覚的に捉え、式変形による解法が持つ意味を理解する手助けになればよいと考える。また、生徒が主体的に探究活動に取り組むためには、探究活動のプロセスを身につける必要があると感じる。連続的に変化する図形を見るだけに終わらず、「GRAPES を利用して予想し(仮説)→どうしてそうなるか理由を考える(検証)」の流れを繰り返すことにより、数学的探究活動のプロセスを身につけられる授業を実施してみた。



2　本時の目標（数学Ⅱ第３章　図形と方程式　２時間）

(1) GRAPES を利用して仮説を立て、数式を用いて検証するという数学的探究のプロセスを身につける。

(2) 交点を通る図形の方程式を GRAPES を利用して視覚的に捉え、式変形による解法が持つ意味を理解する手助けとさせる。

3　授業過程の例

	学習内容・学習活動 主な発問(T)　生徒の学習活動および予想される生徒の反応(S)	指導上の留意点 生徒の反応に対する手立て
1時間目	1 ２直線の交点を通る図形の方程式 $(k+1)x+(2k-1)y-4k-1=0$ 仮説を立てる T:「方程式 $(k+1)x+(2k-1)y-4k-1=0$ は、k の値に関係なく定点を通ります。その定点の座標を求めましょう。」 S1: k に具体的な整数値を代入して、定点を予想する。	・自由に考えさせる。 T1:「k に整数以外の値は代入しなくてもよいですか。」

1 時 間 目	S2:GRAPES に方程式を入力して、パラメータを動かす。 S3:GRAPES を利用して、「直線が動きます。」 S4:GRAPES を利用して、「直線が回転しています。」 S5:GRAPES を利用して、「定点は(2,1)になりそうです。」 検証する T:「なぜ交点(2,1)を通るのか、式変形を利用して自分の言葉で説明しましょう。」 S1: k の値を変えるということについて考える。 S2: k についての恒等式と捉える。 T:「自分の考えを、グループの生徒に説明しましょう。」 発展させる T:「 $k\to\infty$ とすると、どうなるでしょうか。」	T2:「直線はどんな動きをしていますか。」 ・連続的な動きを観察できるとよい。 ・方程式が表す図形を観察するだけでなく、理由を考え式変形による解法の意味を考察できるとよい。 ・考えをグループで共有する ・極限はまだ習っていないが GRAPES を利用して、極限について考える。 ・どうしてその図形に近づくのか、式と言葉を用いて説明させる。
	$\boxed{2}$ 2円の交点を通る図形の方程式 $k(x^2+y^2-5)+(x^2+y^2-6x-2y+5)=0$ 仮説を立てる T:「方程式 $k(x^2+y^2-5)+(x^2+y^2-6x-2y+5)=0$ は、どんな図形を表すでしょうか。」 S1:「 x^2 と y^2 の係数が等しいので、円になりそうです。」 S2:GRAPES に方程式を入力して、パラメータを動かす。 S3:GRAPES を利用して、「直線になるときがあります。」 検証する T:「どうしてそのような図形(円や直線)になるのか、式変形を利用して、自分の言葉で説明しましょう。」 S1: k についての恒等式と捉える。 S2: $k=-1$ のときに、 x^2 と y^2 の項がどうなるか、方程式から考える。 T:「自分の考えを、グループの生徒に説明しましょう。」 発展させる T:「 $k\to\infty$ とすると、どうなるでしょうか。」	・ $\boxed{1}$ と同様
2 時 間 目	$\boxed{3}$ 2つの図形の交点を通る図形の方程式 $kf(x,y)+g(x,y)=0$ 仮説を立てる T:「(1)～(3)から1つ方程式を選び、GRAPES を用いて、どんな図形になるか仮説を立てましょう。」 (1)円と放物線 $k(x^2+y^2-4)+(x^2-2x-y)=0$ (2)交点を持たない2円(互いに外部にある) $k(x^2+y^2-1)+(x^2-8x+y^2+12)=0$ (3)交点を持たない2円(一方が他方の内部にある) $k(x^2+y^2-1)+(x^2+y^2-4)=0$ 検証する 「どうしてそのような図形になるのか、式変形を利用して説明しましょう。」	・円や直線だけでなく、放物線も考察できることに気づくとよい。 ・2次曲線はまだ習っていないが、GRAPES を利用することにより、放物線のほかにも2次曲線(楕円、双曲線)があることを発見できるとよい。
	振り返る T:「今日の授業で大事だと思ったことは何ですか。」 S1:「ICT を利用すると、仮説が立てやすくなります。」 S2:「ICT を利用して立てた仮説は予想に過ぎないので、理由を式変形を利用して説明することが大切です。」 T:「今までの学習を振り返り、ICT を利用すると理解が深まりそうな内容はありますか。次は、どんな方程式について考えてみたいですか。」	・振り返りシートに記入させる。 ・ICT を用いてグラフを動的に考察するよさを認識できるとよい。

4　考察

(1)　方程式 $k(x^2+y^2-4)+(x^2-2x-y)=0$ について　[円と放物線]

$\boxed{考察}$　x，y について整理すると　$(k+1)x^2-2x+ky^2-y-4k=0$

$k+1\fallingdotseq 0$，$k\fallingdotseq 0$ のとき　平方完成すると　$(k+1)\left(x-\dfrac{1}{k+1}\right)^2+k\left(y-\dfrac{1}{2k}\right)^2=\dfrac{16k^3+16k^2+5k+1}{4k(k+1)}$

よって　[1]　楕円になるとき　x^2 と y^2 の係数が同符号になればよいので

$k+1>0$ かつ $k>0$　または　$k+1<0$ かつ $k<0$

すなわち　$k>0$　または　$k<-1$

[2]　放物線になるとき　x^2 または y^2 の係数のうちどちらか一方が0になればよいので

$k+1=0$　または　$k=0$

すなわち　$k=-1$　または　$k=0$

[3]　双曲線になるとき　x^2 と y^2 の係数が異符号になればよいので

$k+1>0$ かつ $k<0$　または　$k+1<0$ かつ $k>0$

すなわち　$-1<k<0$

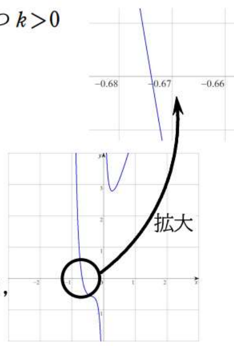
[1]~[3]より　$k<-1$ のとき　楕円（横長の楕円）

$k=-1$ のとき　放物線（軸が x 軸に平行な放物線）

$-1<k<0$ のとき　双曲線

$k=0$ のとき　放物線（軸が y 軸に平行な放物線）

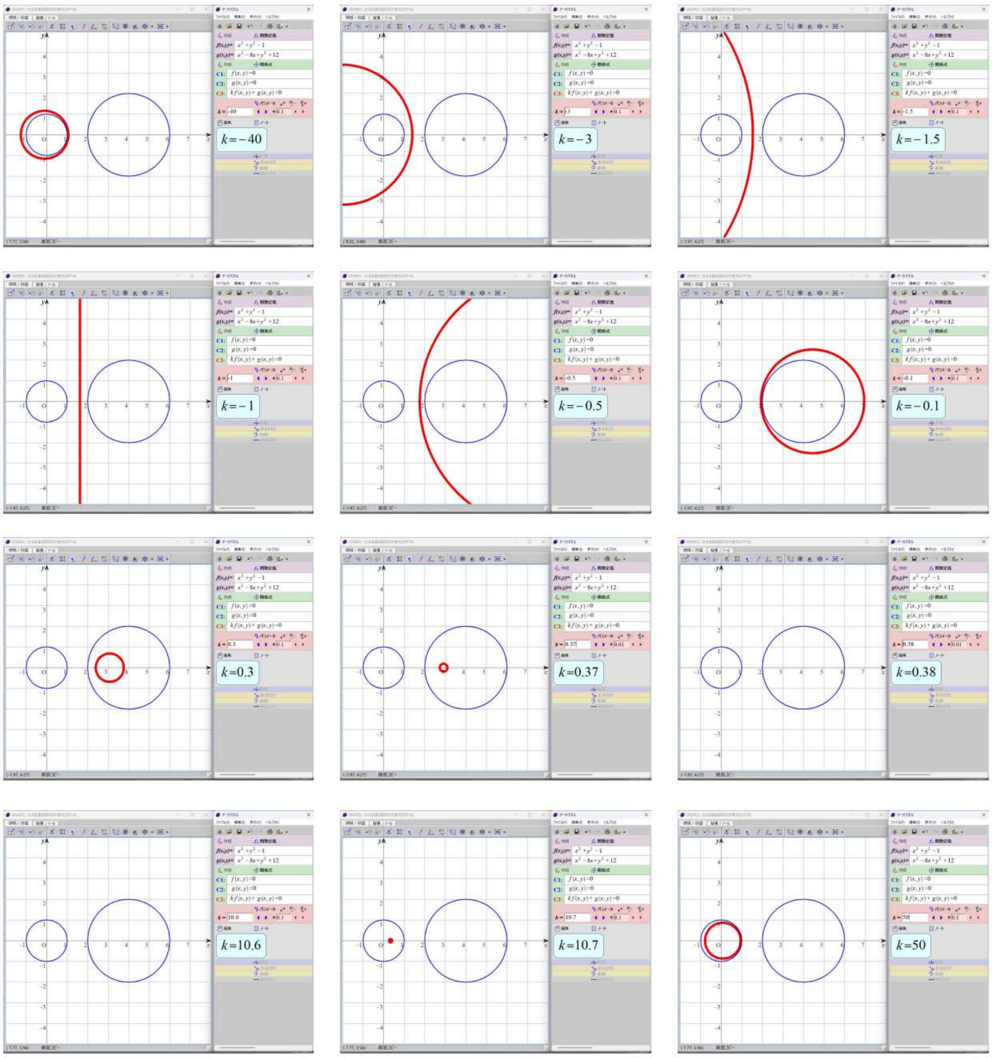
$0<k$ のとき　楕円（縦長の楕円）



また，GRAPESを利用して右辺の $\dfrac{16k^3+16k^2+5k+1}{4k(k+1)}$ のグラフをかいてみると，$k\fallingdotseq-0.67$ で符号が変わるので，双曲線の形が変わる。

すなわち，$k<-0.67\cdots$ のとき，左右対称の双曲線になり，$k>-0.67\cdots$ のとき，上下対称の双曲線になる。

(2) 方程式 $k(x^2+y^2-1)+(x^2-8x+y^2+12)=0$ について [交点をもたない2円]



$\boxed{\text{考察}}$ x，y について整理すると $(k+1)x^2-8x+(k+1)y^2-k+12=0$

$k+1 \fallingdotseq 0$ のとき 平方完成すると $(k+1)\left(x-\dfrac{4}{k+1}\right)^2+(k+1)y^2=\dfrac{k^2-11k+4}{k+1}$

$$\left(x-\frac{4}{k+1}\right)^2+y^2=\frac{k^2-11k+4}{(k+1)^2}$$

よって $(k+1)^2>0$ より $k^2-11k+4>0$ のとき，円になる。

$k^2-11k+4=0$ とすると 解の公式より $k=\dfrac{11\pm\sqrt{105}}{2}$

ここで $\sqrt{105}\fallingdotseq 10.24$ より $k\fallingdotseq 0.38$，10.62

すなわち $k<0.38$，$10.62<k$ のとき，円になる。

$k=-1$ のとき， $-(x^2+y^2-1)+(x^2-8x+y^2+12)=0$ より $x=\dfrac{13}{8}$ より 直線 $x=\dfrac{13}{8}$ になる。

5 おわりに

「GRAPES を利用して予想し(仮説)→どうしてそうなるか理由を考える(検証)」の流れを繰り返すことにより、数学的探究活動のプロセスを身につけることができたと感じた。

2時間目の(1) $k(x^2+y^2-4)+(x^2-2x-y)=0$ では、円、楕円、双曲線、放物線が現れるので、2次曲線への興味関心が高まった生徒もいた。次々に変化する図形に生徒から歓声があがり、生徒同士で画面を共有して観察したり理由を検証したりとする姿が見られた。