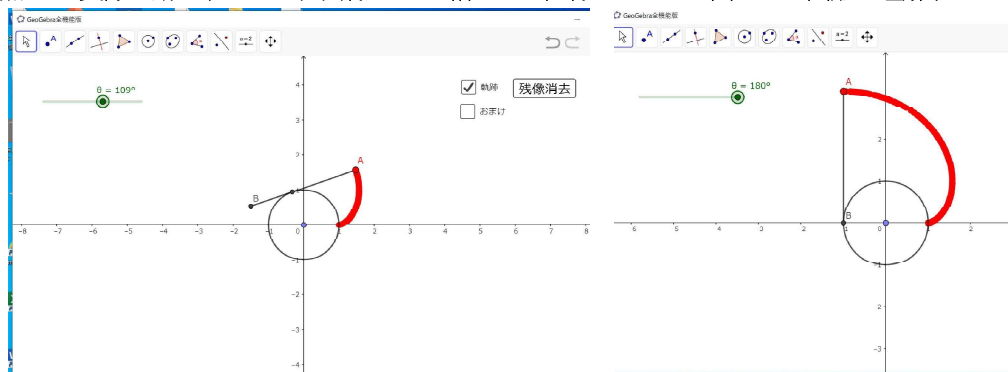


2024 大阪公立大学 6

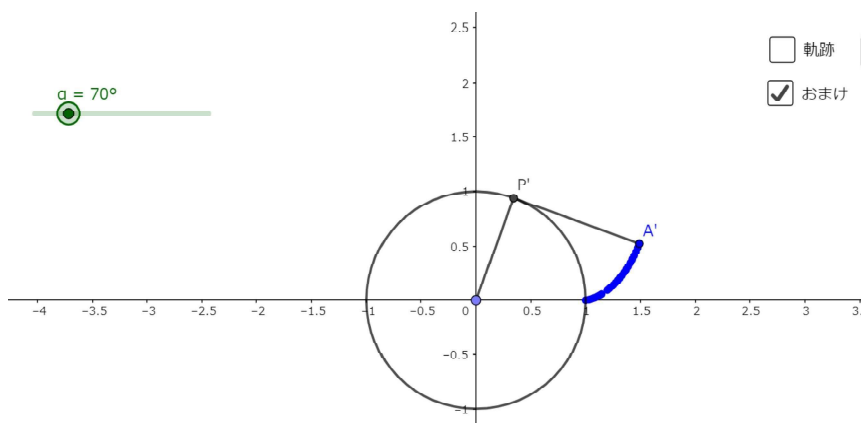
固定された直線に円が接しながら滑ることなく回転するときに、円周上の定点が描く曲線をサイクロイドというが、その類似として、固定された半円に線分が接しながら滑ることなく回転するときに、線分上の定点が描く曲線を考える。すなわち、 xy 平面の単位円 $x^2 + y^2 = 1$ の $y \geq 0$ の部分にある半円を C とし、長さ π の線分 AB が半円 C に接しながら滑らずに動くとする。始めに点 A は $(1, 0)$ 、点 B は $(1, \pi)$ の位置にあり、点 B が $(-1, 0)$ に到達したときに動きを止めるものとし、この間に点 A が描く xy 平面上の曲線を L とする。

- (1) 不定積分 $\int \theta \sin a\theta \, d\theta$ と $\int \theta^2 \cos a\theta \, d\theta$ をそれぞれ求めよ。ただし、 a は正の定数とする
- (2) 半円 C と線分 AB の接点が $(\cos \theta, \sin \theta)$ ($0 \leq \theta \leq \pi$) のときの点 A の座標を求めよ。
- (3) 曲線 L と x 軸および直線 $x = -1$ で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

点 A を実際に動かすことで、曲線 L と x 軸および直線 $x = -1$ で囲まれた図形を理解することができる。



(1), (2) は (3) の誘導問題である。(2) では $\overrightarrow{OP}$ の法線ベクトル $(\sin \theta, -\cos \theta)$ を考えるため、プロジェクタで投影し、書き込むことで生徒の理解を助けることもできる。



また、点 A がインボリュート曲線を描いていることも確認できる。