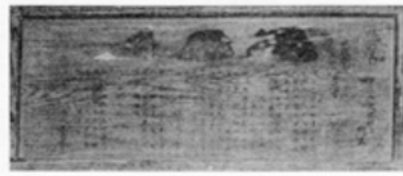
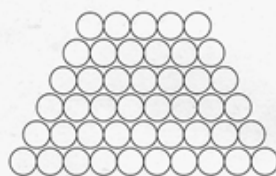


俵杉算を題材として

総合的な探求の時間の講座として、和算を取り上げることになった。今回は全3回の講座の1つとして、俵杉算の教材を扱うことにする。題材は、秋田県仙北市にある熊野神社に掲げられた算額の問題をもとにした。以下は使用教材からの抜粋である。

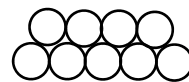
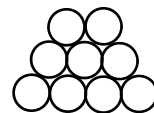
本日の問題

今、図のように俵がある。これを2通りの方法で積む。ひとつは上が19個、もうひとつは上が6個の台形上に積むことができた。俵は何個あるか。



まず、問題の意味を理解するために、簡単な例で説明する。

俵が9個あるときに左図のような積み方をすると、ひとつは上が2個、もうひとつは上が4個の台形上に積むことができる。このように俵の数を適切に定めると、2種類の方法で台形状に俵を積むことができる。



$$9 = \underline{2} + 3 + 4 = \underline{4} + 5$$

問1 ひとつは上が2個、もうひとつは上が8個の台形上に積むことができる。この条件を満たす俵の数を1つ求めよ。※実際に数字を書き出して考えよう(この後本日の問題を行う)。

本日の問題の答えは見つかったらどうか。答えが見つかった人は、他に答えがないか、あるいは数字を書き並べるのではなく、方程式でこの問題が解けないかを考えてみよう。

既に気がついたと思うが、台形上の俵の数は等差数列の和の公式で表すことができる。底辺が n 個、上辺が1個の俵の山があるとき、俵の合計は

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \sum_{k=1}^n k = \frac{1}{2} n(n+1)$$

今、上辺が19個の山の底辺の俵の数を a 個、全体の俵の数を T 個とする。同様に上辺が6個の山の底辺の俵の数を b 個、全体の俵の数を U 個とする。

$$T = \frac{a(a+1)}{2} - \frac{18(18+1)}{2} = \frac{a(a+1)}{2} - 171, \quad U = \frac{b(b+1)}{2} - \frac{5(5+1)}{2} = \frac{b(b+1)}{2} - 15$$

$T = U$ より

$$\frac{a(a+1)}{2} - 171 = \frac{b(b+1)}{2} - 15$$

$$a^2 + a = b^2 + b + 312$$

この式を満たす自然数 a, b を求めよう(一次不定方程式を解いて a, b を求める)。

時間があれば、次の問題にも取り組んでみよう。

1. 俵の数を適切に定めると、2種類の方法で台形状に俵を積むことができる。

このときの俵の数に何か規則性はあるだろうか。

2. 俵の数を適切に定めて、3種類の方法で台形状に俵を積むことはできるだろうか。もしできるなら、そのときの俵の数の最小値は？

3. 俵の数を適切に定めて、4種類の方法で台形状に俵を積むことはできるだろうか。もしできるなら、そのときの俵の数の最小値は？

ここからがタブレット PC の出番である。考察に和の計算を大量に行う必要があるため、Excel を用いて計算をする。このとき、数式を工夫して効率よく計算するようにする。

考え方 1

①俵を 2 段に積む場合の俵の数は小さい順に、 $2+3, 3+4, 4+5, \dots$ これらを Excel で計算。

→すべて奇数($2a+1, a$ は 2 以上の整数)であることがわかる。

②俵を 3 段に積む場合の俵の数は小さい順に、 $2+3+4, 3+4+5, 4+5+6, \dots$ 同様に計算。

→すべて 3 の倍数($3b, b$ は 3 以上の整数)であることがわかる。

①②より、9 以上の「奇数の 3 の倍数」なら、2 種類(以上)の方法で積めることがわかる。

③俵を 4 段に積む場合、同様に計算して、 $4c+2$ (c は 3 以上の整数) ※2 段には積めない

④俵を 5 段に積む場合、同様に計算して、 $5d$ (d は 4 以上の整数)

⑤俵を 6 段に積む場合、同様に計算して、 $6e+3$ (e は 4 以上の整数) ※2 段にも 3 段にも積める。

ここまで考えると、上記の 1. ～ 3. の解答を導くことができる。

考え方 2

表のようなシートを作る。左の数字が初項、上の数字が末項となる自然数の和を計算し(例: $3+4+5+6+7=25$)、シートの中に何個同じ数字があるかを調べると、積み方の種類の数や、実際の積み方がわかる。ただ、このシートを限られた時間内に生徒に作らせるのはかなり難しいので、ある程度作り方のヒントを教えるか、場合によっては数式の作成方法をこちらから指示する必要がある。

	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
2	5	9	14	20	27	35	44	54	65	77	90	104	
3		7	12	18	25	33	42	52	63	75	88	102	
4			9	15	22	30	39	49	60	72	85	99	
5				11	18	26	35	45	56	68	81	95	
6					13	21	30	40	51	63	76	90	
7						15	24	34	45	57	70	84	
8							17	27	38	50	63	77	
9								19	30	42	55	69	
10									21	33	46	60	
11										23	36	50	
12											25	39	
13												27	

俵杉算の教材は例えば「俵の数を与えたときに台形に積めない数字がある。それらに共通点はないか」を考えるなど、発展性のある教材なので、今後も研究を続けていきたい。