愛知県高等学校数学研究会

数 学 科 教 育 情 報 委 員 会

数Ⅱ 【軌跡・不等式の表す領域】

2018 東北大学　理・工・医(医・保健(放射線技術・検査技術))・歯・薬・農学部

xy 平面における２つの放物線 $C: y=(x-a)^2+b\Lambda$ ①, $D: y=-x^2\Lambda$ ②を考える。

（１） C と D が異なる２点で交わり，その２交点の x 座標の差が１となるように実数 a,b が動くとき， C の頂点 (a,b) の軌跡を図示せよ。

（２）実数 a,b が（１）の条件を満たしながら動くとき， C と D の２交点を結ぶ直線が通過する範囲を求め，図示せよ。

[解答の方針]

曲線 C,D から y を消去して整理した式　$2x^2-2ax+a^2+b=0$ の解の差が１となる条件は

$\sqrt{-a^2-2b}=1$　これより $b=-\dfrac{1}{2}a^2-\dfrac{1}{2}\Lambda$ ③ （１）はこれを図示すればよい。

また， C と D の２交点を結ぶ直線の方程式は，①＋②より $2y=(x-a)^2+b-x^2$ すなわち

$2y=-2ax+a^2+b$ ，これに③を代入して整理すると

$$\frac{1}{4}a^2-xa-y-\frac{1}{4}=0\Lambda ⑤$$

直線⑤が点 (x,y) を通る条件は， a に関するこの方程式が実数解を持つことだから

$$\frac{\mathrm{D}}{4}=x^2+y+\frac{1}{4}\geqq 0\quad より\quad y\geqq -x^2-\frac{1}{4}\Lambda ⑥$$

⑥を満たす領域が(２)の解となる。

この様子を Graepes で表示してみた。実際にグラフを書いてみると，⑥の境界線が直線⑤の包絡線になっていることが分かる。