

2019 三重大学 教育・人文・生物資源学部

a を実数とし、直線 $y = 2ax - a^2$ を l_a とする。以下の問い合わせに答えよ。

- (1) l_a が点 $(2, -5)$ を通るときの a の値を求めよ。
- (2) どのような実数 a を選んでも、 l_a は点 $(3, 10)$ を通らないことを示せ。
- (3) a がすべての実数を動くとき、 l_a が通る点 (x, y) の全体をと S とおく。領域 S を図示せよ。

[解答の方針]

- (1) 方程式 $a^2 - 2ax + y = 0 \cdots ①$ と考える。 $①$ に $x = 2, y = -5$ を代入し、そのときの a の値を求める。
- (2) l_a が点 $(3, 10)$ を通ると仮定すると、 $①$ に $x = 3, y = 10$ を代入した式 $a^2 - 6a + 10 = 0$ が成り立つが、この式を満たす実数 a の値が存在しないことを示す。
- (3) $①$ において、 $D/4 = (-x)^2 - y \geq 0$ より、 $y \leq x^2 \cdots ②$ だから、領域 S は不等式 $②$ が表す領域である。

[コメント]

入試問題としては時折出てくる「直線群の通過領域」の問題である。本来、判別式を使うということを知っていないと手がつけられない問題であるが、本問は(1)や(2)が(3)のヒントになっている。そのため、予備知識がなくてもある程度手がつけられるように工夫されているのではないかと思う。

(1)～(3)の様子を Grapes で表示してみた。実際にグラフを書いてみると、(3)の境界線が直線 l_a の包絡線になっていることが分かる。

