

数Ⅱ 【図形と方程式】軌跡

2015 富山大学 薬学部(前期)【1】

m を実数とする。方程式

$$mx^2 - my^2 + (1-m^2)xy + 5(1+m^2)y - 25m = 0 \cdots \cdots (*)$$

を考える。このとき、次の問い合わせに答えよ。

- (1) xy 平面において、方程式(*)が表す図形は 2 直線であることを示せ。
- (2) (1) で求めた 2 直線は m の値にかかわらずそれぞれ定点を通る。これらの定点を求めよ。
- (3) m が $-1 \leq m \leq 3$ の範囲を動くとき、(1) で求めた 2 直線の交点の軌跡を図示せよ。

軌跡の問題としては、頻出問題である。

(1) では Grapes を用いて方程式が表す図形を直接描くことによって、それが 2 直線であることが確かめられる。この性質は m の値が変化しても保たれる。

また、(2)(3) ではパラメータを動かしてグラフを描画することにより、2 直線が定点を通ることが確認できる。また、交点の軌跡を図示することにより、その軌跡が円 $x^2 + y^2 = 25 \cdots \textcircled{1}$ 上にあることもわかる。

なお、この問題の解答とは直接関係ないが、 m の範囲を実数全体とした場合、交点の軌跡は $\textcircled{1}$ 上のすべての点ではなく、点 $(5, 0)$ を除いた図形となる。これは、(*) が表す 2 直線

$$x - my + 5 = 0 \cdots \textcircled{2}, my + y - 5m = 0 \cdots \textcircled{3}$$

のうち、 $\textcircled{3}$ が点 $(5, 0)$ を通り、 x 軸に垂直な直線を表すことができないことからきている。このことも、 m の絶対値を限りなく大きくし、点 $(5, 0)$ 付近を拡大表示することによって確かめることができる。

