

数Ⅱ 【図形と方程式】 軌跡

2015 富山大学 薬学部(前期)【1】

$m$  を実数とする。方程式

$$mx^2 - my^2 + (1 - m^2)xy + 5(1 + m^2)y - 25m = 0 \cdots \cdots (*)$$

を考える。このとき、次の問いに答えよ。

- (1)  $xy$  平面において、方程式(\*)が表す図形は2直線であることを示せ。
- (2) (1)で求めた2直線は $m$ の値にかかわらずそれぞれ定点を通る。これらの定点を求めよ。
- (3)  $m$  が  $-1 \leq m \leq 3$  の範囲を動くとき、(1)で求めた2直線の交点の軌跡を図示せよ。

軌跡の問題としては、頻出問題である。

(1)では Grapes を用いて方程式が表す図形を直接描くことによって、それが2直線であることが確かめられる。この性質は $m$ の値が変化しても保たれる。

また、(2)(3)ではパラメータを動かしてグラフを描画することにより、2直線が定点を通ることが確認できる。また、交点の軌跡を図示することにより、その軌跡が円  $x^2 + y^2 = 25 \cdots \textcircled{1}$  上にあることもわかる。

なお、この問題の解答とは直接関係ないが、 $m$ の範囲を実数全体とした場合、交点の軌跡は①上のすべての点ではなく、点(5, 0)を除いた図形となる。これは、(\*)が表す2直線

$$x - my + 5 = 0 \cdots \textcircled{2}, my + y - 5m = 0 \cdots \textcircled{3}$$

のうち、③が点(5, 0)を通り、 $x$ 軸に垂直な直線を表すことができないことからきている。このことも、 $m$ の絶対値を限りなく大きくし、点(5, 0)付近を拡大表示することによって確かめることができる。

