愛知県高等学校数学研究会
数学科教育情報委員会

2018　信州大学

θが$-\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$の範囲を動くとき，座標平面上の直線

$$y=(\sin\theta)x+\cos\theta$$

上の点$(x,\ y)$について，不等式

$$-|x| \leqq y \leqq \sqrt{x^2+1}$$

が成り立つことを示せ．

本問では，単純に（左辺）－（右辺）などによる不等式証明の手順を踏めば，証明はさほど難しくはない．Geogebraにより，l：$y=(\sin\theta)x+\cos\theta$ のグラフをθのスライダーを設定し，$-\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲で動かしてみると l の通過領域が下図のようになり，$y=\sqrt{x^2+1}$ が包絡線になっていることが分かる．これが本問の背景であり，通過領域を考えるよい題材になるのではないか．

また類題として，m：$y=(\cos\theta)x+\sin\theta$ や n：$(\cos\theta)x+(\sin\theta)y=1$ の $-\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ における通過領域を考えて，m や n 上の点$(x,\ y)$がどのような不等式を満たすのか考えてみるのも面白い．