愛知県高等学校数学研究会
数 学 科 教 育 情 報 委 員 会

2020　京都大学

k を正の実数とする．座標空間において，原点Oを中心とする半径 1 の球面上の 4 点 A，B，C，Dが次の関係式を満たしている．

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\frac{1}{2}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=-\frac{\sqrt{6}}{4}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}=k$$

このとき， k の値を求めよ．ただし，座標空間の点X，Yに対して， $\overrightarrow{\mathrm{OX}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OY}}$ は， $\overrightarrow{\mathrm{OX}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OY}}$ の内積を表す．

上記の問題について，次のようなアプローチで解答した．

【解答】<u>点Aを (1，0，0) に固定してよい</u>①．このとき，点Bを (p，q，r) とおくと，

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\dfrac{1}{2}$ より， $p=\dfrac{1}{2}$ と分かる．

したがって，点Bは球面 $x^2+y^2+z^2=1$ と平面 $x=\dfrac{1}{2}$ の交線上に存在する．

そこで，<u>点Bの z 座標が 0， y 座標が正となるように x 軸まわりに球面を回転させ，点C，Dを取り直す</u>②．

点Bの座標は $\left(\dfrac{1}{2},\ q,\ 0\right)$ とおけるが，球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 上にあることから $q=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ と分かる．

A，Bの座標が分かったことから，条件式によりC，Dの座標も求まり， k の値が分かる．

【解答】の傍線部①，②について，geogebraを用いて視覚的に説明することができる．

（1）傍線部①　<u>点Aを (1，0，0) に固定してよい</u>　について

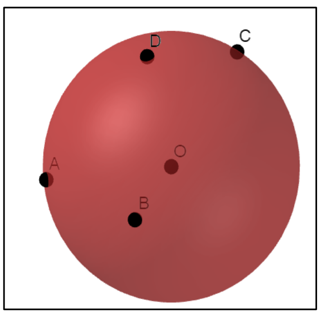

図 1

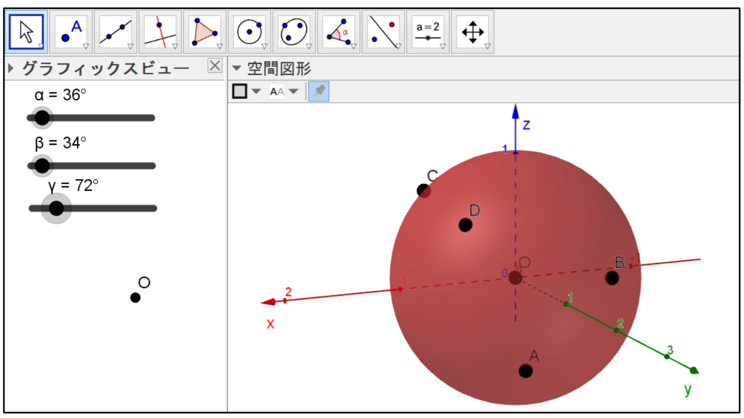

図 2

図１のように，球面上に４点A，B，C，Dを配置し，軸を表示せずに球面を回転させる．
次に図２のように軸を表示し，点Aを $(1,\ 0,\ 0)$ に持ってくることができることを示す．
※ α は x 軸まわりの回転角，β は y 軸まわりの回転角，γ は z 軸まわりの回転角を表す．

（２）傍線部②　<u>点Bの z 座標が０，y 座標が正となるように x 軸まわりに球面を回転させ，点C，Dを取り直す</u>　について

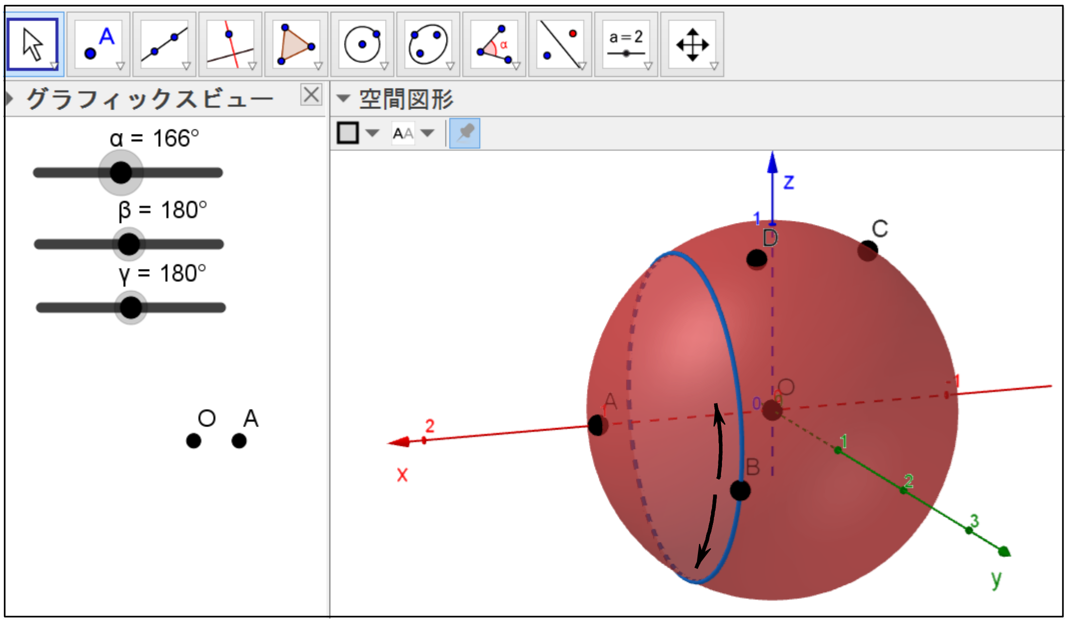

図３

図３のように，球面 $x^2+y^2+z^2=1$ と平面 $x=\dfrac{1}{2}$ の交線を表示し，α を変化させながら点Bを交線上で動かす．
点Bの変化にともなって，点C，Dは変化するが，点Aは不動であることが視覚的に分かる．

以上により，点Aを $(1,\ 0,\ 0)$ に，点Bを xy 平面上に固定することにより，問題がスムーズに解けることが分かる．