

2020 神戸大学 理系【5】

p が2以上の自然数とし、数列 $\{x_n\}$ は

$$x_1 = \frac{1}{2^{p+1}}, \quad x_{n+1} = |2x_n - 1| \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

をみたすとする。以下の問いに答えよ。

- (1) $p = 3$ のとき、 x_n を求めよ。
- (2) $x_{p+1} = x_1$ であることを示せ。

漸化式で定義された数列の周期性が題材の問題である。一般的に、 $a_{n+1} = f(a_n)$ で定義される数列 $\{a_n\}$ の値の推移は、曲線 $y = f(x)$ と直線 $y = x$ のグラフを考えて折れ線の動きを追うことにより解釈することができる。

教材は GeoGebra で作成したものである。普段あまり使用しないようなコマンド等も利用しているので教材作成の難易度は高めである。GeoGebra が得意な人は作成にチャレンジしてほしい。

本問題の理解はもちろんだが、

- ・関数 $f(x)$ （つまり漸化式）を変化させたらどうなるか？
- ・初項の値を変えたらどうなるか？
- ・どういうときに収束し、どういうときに発散するのか？

といった数学的な実験ができる。黒板や紙の上だけではなかなか難しい学びが実現可能となる。

