入試問題 【数学Ⅲ】２次曲線

愛知県高等学校数学研究会
数学科教育情報委員会

2020 旭川医科大学

a，b，r は正の実数で $0<b<a<r<\sqrt{a^2+b^2}$ とし，楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ を C とおく。点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ は円 $x^2+y^2=r^2$ 上の点で $p>a$，$q \geqq 0$ を満たす。

(1) 点 P から楕円 C に引いた 2 本の接線の傾きをそれぞれ m_1，m_2 $(m_1<m_2)$ とする　とき，m_1+m_2 と m_1m_2 を p，q，a，b を用いて表せ。

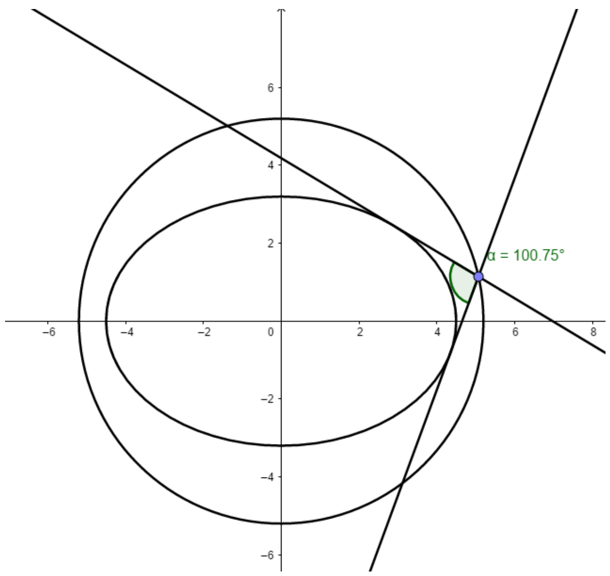
(2) (1) で引いた傾き m_1，m_2 の接線の接点をそれぞれ Q_1，Q_2 とする。3 点 P，Q_1，Q_2 を頂点とする三角形において，$\angle \mathrm{Q}_1\mathrm{PQ}_2$ の大きさを θ $(0<\theta<\pi)$ とする。

(i) $\tan\theta$ を p，q，r，a，b を用いて表し，$\angle \mathrm{Q}_1\mathrm{PQ}_2$ が鈍角であることを示せ。

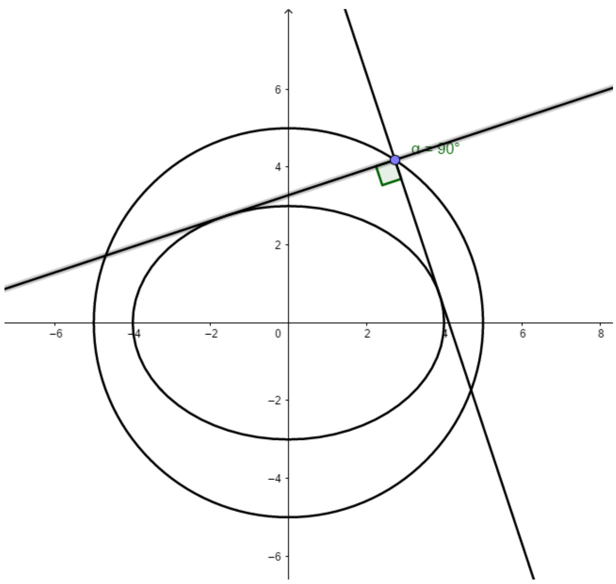
(ii) r が $\sqrt{a^2+b^2}$ より小さい値をとりながら $\sqrt{a^2+b^2}$ に限りなく近づくとき，点 $\mathrm{P}(r,\ 0)$ における θ の極限値を求めよ。

楕円に引いた接線の問題はよくあるが、今回は楕円の外にある円周上の点から 2 本の接線を引き、なす角度について問題にしている。条件の $0<b<a<r<\sqrt{a^2+b^2}$ の意味するところが分からなかったので、GeoGebra で作図してみた。

$r<\sqrt{a^2+b^2}$



$r=\sqrt{a^2+b^2}$



$r<\sqrt{a^2+b^2}$ のときは接線のなす角が鈍角になり、かも円周上の点の位置によって角度が変化した。今回は角度を正接で扱っている関係上、極限値となっているが、もちろん $r=\sqrt{a^2+b^2}$ とすればなす角度は直角となる。
大方予想はつくが $r>\sqrt{a^2+b^2}$ であれば鋭角となる。
楕円の2接線が垂直になるときの交点が円を描く問題はよく見るので、その場面で見せたい。

$r>\sqrt{a^2+b^2}$