数Ｂ 【ベクトルと図形】

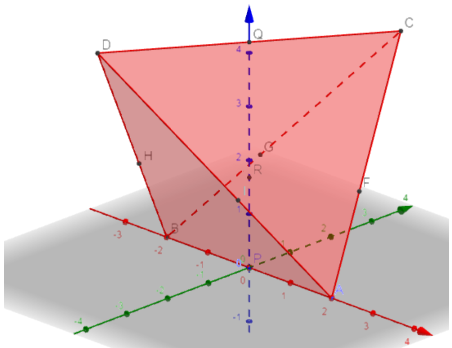
愛知県高等学校数学研究会
数学科教育情報委員会

2018 京都大学　理系【６】

四面体 ABCD は AC=BD，AD=BC を満たすとし，辺 AB の中点を P，辺 CD の中点を Q とする。

(1)　辺 AB と線分 PQ は垂直であることを示せ。

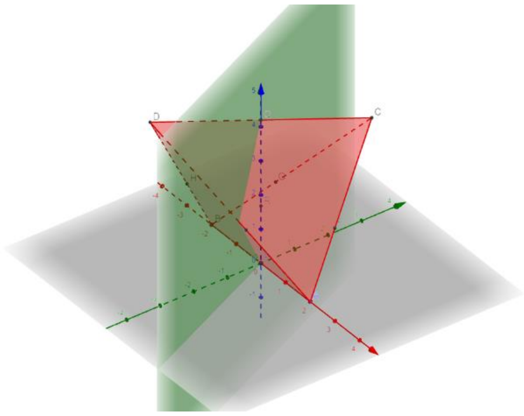
(2)　線分 PQ を含む平面 α で四面体 ABCD を切って 2 つの部分に分ける。このとき，2 つの部分の体積は等しいことを示せ。

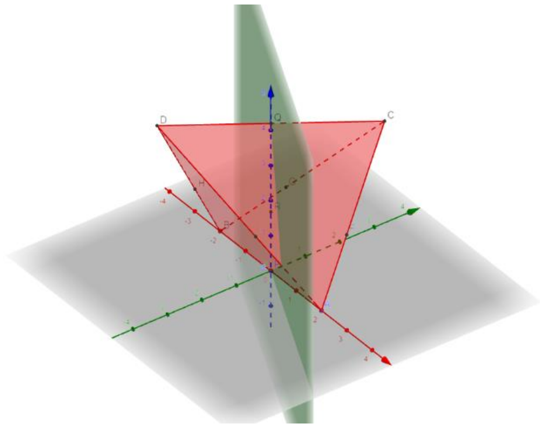


この問題の(2)では、(1)を解き、同様に考えることで、AB⊥PQ と CD⊥PQ が分かる。したがって、線分 PQ が座標軸上になるように、それぞれの座標を設定することで、右の図のように、把握しやすい形を考えることができる。

この図が想像できただけで解答が進むわけではないが、図をもとにどのような解法を考えるかが非常に重要である。

内容は、PQ（図ではｚ軸）を含む平面が、図形を二等分することを示すこと。単純に体積を求めようにも、ｚ軸を含む平面は無数に存在し、現実的とはいえない。





そこで、体積の基本的な考え方でもある、「断面積を積分する」ということに発想が持てれば、考察しやすくなるという本質を問う良問である。

ｚ＝ｔでの断面を表示し、その断面と平面の交線を表示し動かしながら、交線が断面積を常に二等分していることを視覚的に捉えることで、本問の内容の理解が飛躍的に増すと考えられる。