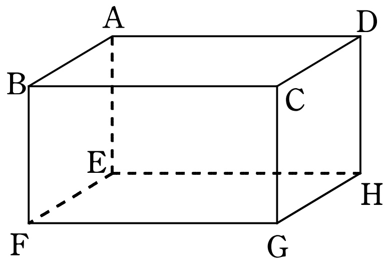
愛知県高等学校数学研究会
数学科教育情報委員会

2019　岐阜薬科大学

右図の直方体ABCD－EFGHにおいて，AB=1，AD=2，AE=1とする．以下の問いに答えよ．

(1)　△AFDを直線FDのまわりに１回転してできる立体の体積を求めよ．

(2)　△AFDを直線AEのまわりに１回転してできる立体の体積を求めよ．

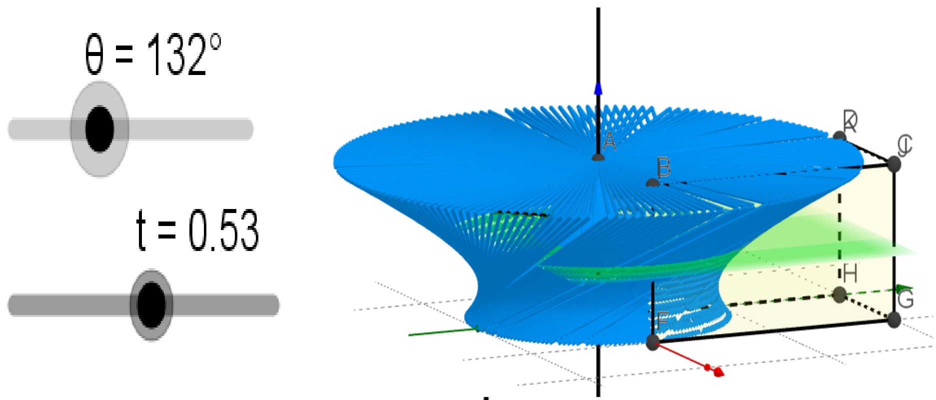


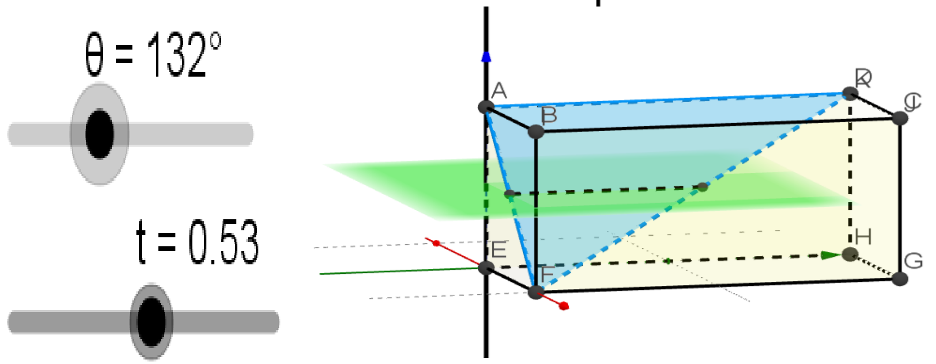
上記(2)の問題に，次の2点からアプローチしたい．

- ねじ回転軸から離れたねじれの位置にある線分が１回転してできる立体の概形を捉える．
- △AFDを直線AEのまわりに１回転してできる立体の体積は，△AEDを直線AEのまわりに１回転してできる立体の体積に等しいことを視覚的に理解する．

回転軸から離れたねじれの位置にある線分が１回転してできる立体の概形を捉えるために，次のようなGeogebraファイルを作成した．

θを動かすことにより，回転体の概形や平面 $z=t$ で切断したときの切断面の様子を視覚的に捉えることができる．

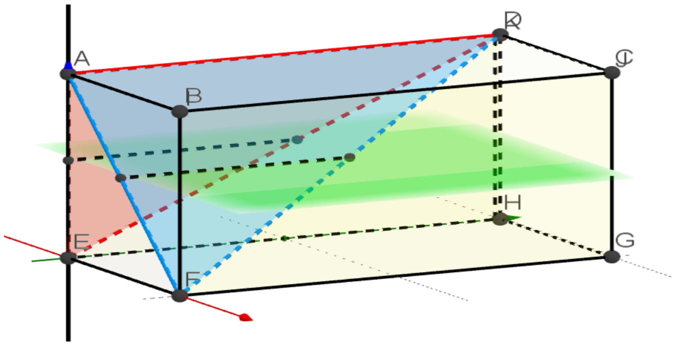




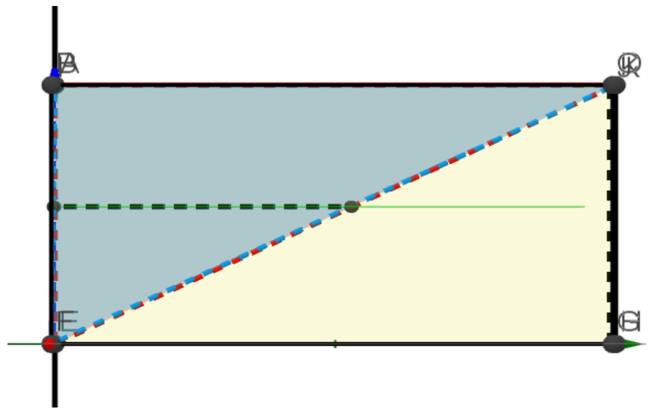
次に(2)の問いに対して，△AFDを平面 $z=t\ (0\leqq t\leqq 1)$ で切断し，△AFDと平面 $z=t$ の交線が一回転してできる面積（回転体の断面積）を求め，0から1まで積分するというのが常套手段であろう．この問いに対する別解として次のような方法が挙げられる．

> △AFDを直線AEのまわりに１回転してできる立体の体積は，△AEDを直線AEのまわりに１回転してできる立体の体積に等しい

この事実は，次のGeogebraファイルで確認すれば一目瞭然である．
△AFDと△AEDをともに平面 $z=t$ で切断したときの様子を示したものである．



とくに正面から見てみると，△AFDと△AEDを平面 $z=t$ で切断したときの切り口の線分の長さが同じであることがすぐに分かる．



したがって，△AFDと△AEDを平面 $z=t$ で切断したときにできる線分を１回転してできる面積（断面積）が等しいことが容易に分かるので，△AFDを直線AEのまわりに１回転してできる立体の体積と，△AEDを直線AEのまわりに１回転してできる立体の体積に等しいことが分かる．