愛知県高等学校数学研究会
数学科教育情報委員会

2018　東京大学　第4問

放物線 $y=x^2$ のうち $-1\leqq x\leqq 1$ をみたす部分を C とする。座標平面上の原点 O と点 $A(1,0)$ を考える。

(1)点Pが C 上を動くとき、

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=2\overrightarrow{\mathrm{OP}}$$

を満たす点 Q の軌跡を求めよ。

(2)点 P が C 上を動き、点 R が線分 OA 上を動くとき、

$$\overrightarrow{\mathrm{OS}}=2\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OR}}$$

をみたす点 S が動く領域を座標平面上に図示してその面積を求めよ。

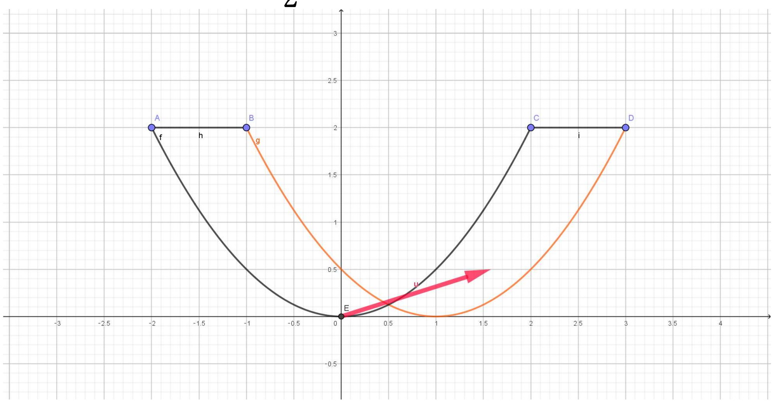
(1)　$P(p,p^2)\,(-1\leqq p\leqq 1)$, $Q(X,Y)$ とおくと、$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=2\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ より

$(X,Y)=(2p,2p^2)$

よって $X=2p$, $Y=2p^2$ となるので、この2式から p を消去すると $Y=\dfrac{1}{2}X^2$ となる。 $-1\leqq p\leqq 1$ より、 $-2\leqq X\leqq 2$,$0\leqq Y\leqq 2$ となるので、 Q の軌跡は

放物線 $y=\dfrac{1}{2}x^2$ $(-2\leqq x\leqq 2)$

となる。



(2) $R(r,0)\,(0\leqq r\leqq 1)$ とおくと

$\overrightarrow{\mathrm{OS}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+\overrightarrow{\mathrm{OR}}$

よって、 S は Q を $\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ だけ平行移動させた点である。 Q の軌跡は(1)より $C'':y=\dfrac{1}{2}x^2(-2\leqq x\leqq 2)$ であり、 r は $0\leqq r\leqq 1$ の範囲を動くので、求める領域は C' を x 軸方向に 1 だけ平行移動させた際に C'' が通過する領域なので、図の斜線部分となる。この領域は $x=\dfrac{1}{2}$ に関して対称になるので、この領域の面積を S とすると $S=\dfrac{95}{24}$ となる。