

2018 埼玉大学 理・工【3】

a, b を正の実数とする。 xyz 空間において、原点を中心とする半径 $\sqrt{3}$ の球面上に 4 点 $A(-a, 0, b)$, $B(-a, 0, -b)$, $C(a, -b, 0)$, $D(a, b, 0)$ があり、 $AB=AC$ を満たすとする。

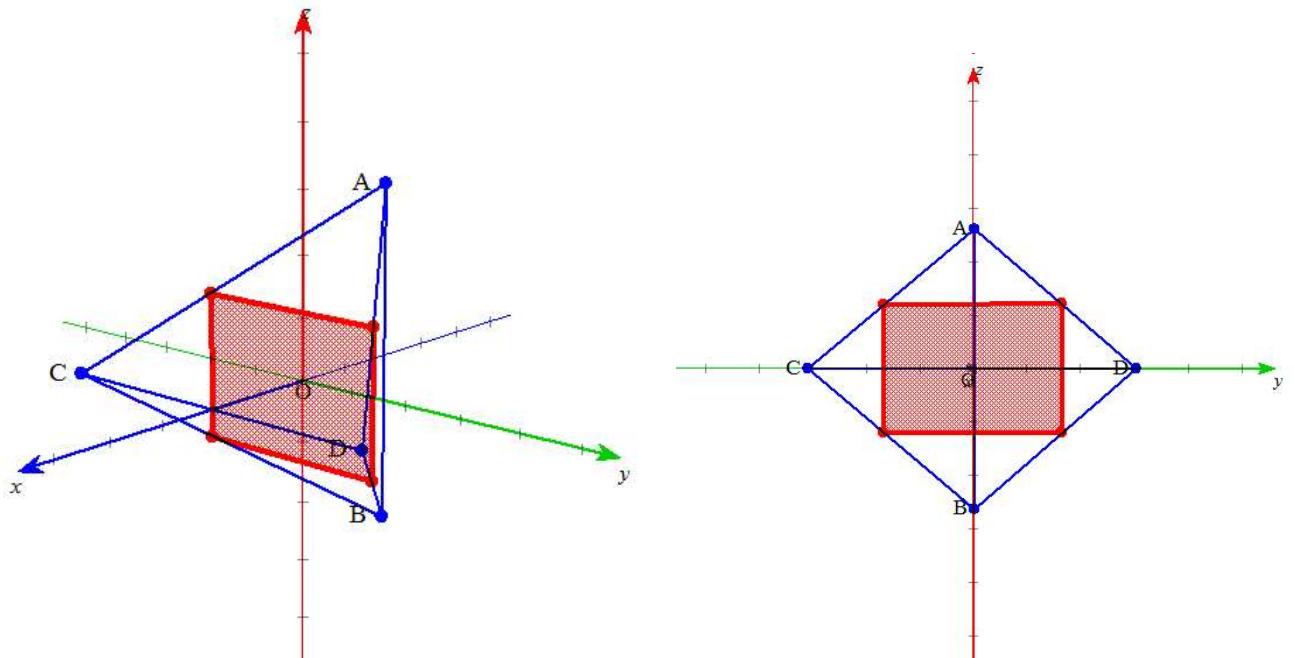
- (1) a, b を求めよ。
- (2) 実数 a, b に対し 2 点 A, D を通る直線と平面 $x=t$ との交点の座標を求めよ。
- (3) 四面体 $ABCD$ を x 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積を求めよ。

(1) では $AB=AC$ から a, b の値を求める。

(2) では直線 AD の方程式、もしくは \overline{AD} を求め、平面 $x=t$ との交点を求める。

(3) は四面体 $ABCD$ が平面 $y=0, z=0$ に対称であることから、四面体 $ABCD$ を平面 $x=t$ で切断した断面は長方形になる。したがって求める回転体を平面 $x=t$ で切断したときの断面図は、 $\frac{\text{長方形の対角線長さ}}{2}$ を半径とする円である。

以降は積分計算を行うことで体積を求めることができる。



3D-GRAPESで書くことで図形が平面 $y=0, z=0$ に関して対称になっていることを確認することができる。

また、 t の値を $-1 < t < 1$ で変化させたとき、四面体 $ABCD$ を平面 $x=t$ で切断したときの断面図が常に長方形になっていることも分かる。