愛知県高等学校数学研究会
数学科教育情報委員会

2018 大阪大学 理系【4】

座標空間に6点

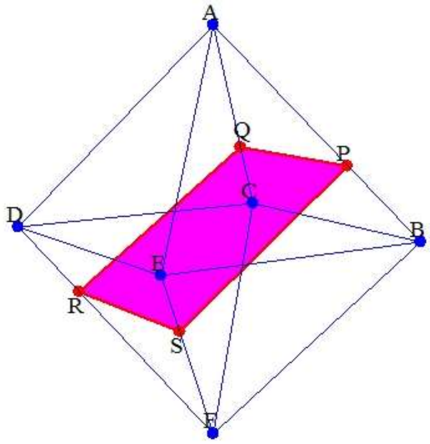
$A(0,0,1)$, $B(1,0,0)$, $C(0,1,0)$, $D(-1,0,0)$, $E(0,-1,0)$, $F(0,0,-1)$

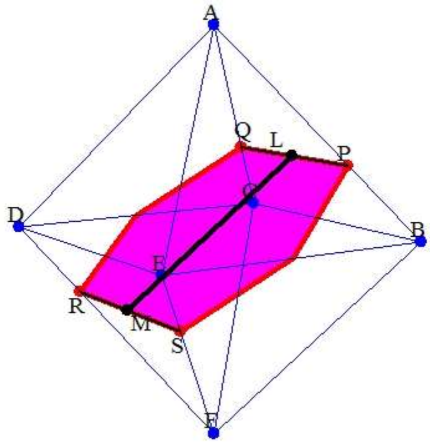
を頂点とする正八面体 ABCDEF がある. s, t を $0<s<1$, $0<t<1$ を満たす実数とする. 線分 AB, ACをそれぞれ $1-s:s$ に内分する点を P, Q とし, 線分 FD, FE をそれぞれ $1-t:t$ に内分する点を R, S とする.

(1) 4 点 P, Q, R, S が同一平面上にあることを示せ.

(2) 線分 PQ の中点を L とし, 線分 RS の中点を M とする. s, t が $0<s<1$, $0<t<1$ の範囲を動くとき, 線分LM の長さの最小値 m を求めよ.

(3) 正八面体 ABCDEF の 4 点 P, Q, R, S を通る平面による切り口の面積を X とする. 線分LM の長さが (2) の m の値をとるとき, X を最大とするような s, t の値と, そのときの X の値を求めよ.





Grapes3Dで描いてみると, (1)は一目瞭然であり, 四角形 PQRS が台形になることが分かる. s, t を変化させると LM の長さの変化が分かるので, 図形的な意味を考えさせるとよい。

(3) の切り口の形は分かりにくいので, 視点を変えてみることで, どんな計算をすればよいのかが分かる。

方針

(1) $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{RS}$ を成分で表すことで, $\overrightarrow{PQ} /\!/ \overrightarrow{RS}$ が分かる.

(2) $|\overrightarrow{LM}|^2$ を計算すると s, t の 2 次式になるので, 平方完成で最小値が求まる。 答 $s+t=\dfrac{2}{3}$ のとき $m=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$

(3) 4 点 P, Q, R, S を通る平面と BE, CD の交点を G, H とすると $GH=BC=\sqrt{2}$ (一定)であり, X は台形 PQHG と台形 RSGH の面積の和なのでこれを計算すればよい。