愛知県高等学校数学研究会
数学科教育情報委員会

(1)　ネイピア数 e の近似値を求める。

(2)　実践

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \quad (n：自然数)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}{}_nC_k\left(\frac{1}{n}\right)^k$$

ここで，

$${}_n\mathrm{C}_k\left(\frac{1}{n}\right)^k=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots\{n-(k-1)\}}{k\,!}\cdot\frac{1}{n^k}$$
$$=\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\frac{1}{k\,!}$$

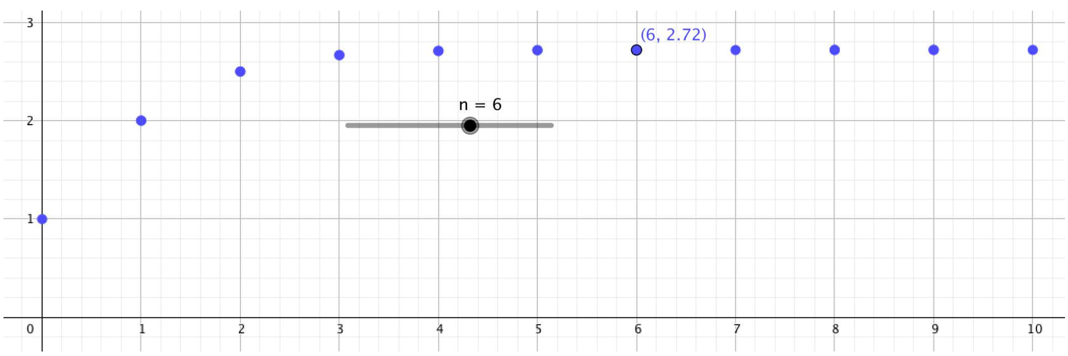
よって，

$$e=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k\,!}$$

$e_6=\displaystyle\sum_{k=0}^{6}\frac{1}{k\,!}$ を計算してみよう。

$$e_6=\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}$$
$$=2.71805\cdots\cdots$$
$$\fallingdotseq 2.718$$

$e_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k\,!}$ $(0\leqq n\leqq 10)$ をGeoGebraを用いてイメージする。



参考

7 以上のどの n に対しても $\displaystyle\sum_{k=7}^{n}\frac{1}{k\,!}<0.0003$ が成立することを示せ。（2007年南山大抜粋）

これより，e の近似値について，小数点以下第 4 位を四捨五入して求めると，

$e\fallingdotseq 2.718$

となる。