

エクセルとgeogebraで $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ の直観的な理解を促す

1 はじめに

次期学習指導要領の本文中には、「コンピュータなどの情報機器を用いるなどして…」という言葉が至る所に見られる。今回は次期学習指導要領79ページ、「極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ 及び $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$ が収束することを、コンピュータなどの情報機器を用いるなどして直観的に理解させるようにする」を読み、実際どのような授業が考えられるか構想してみた。

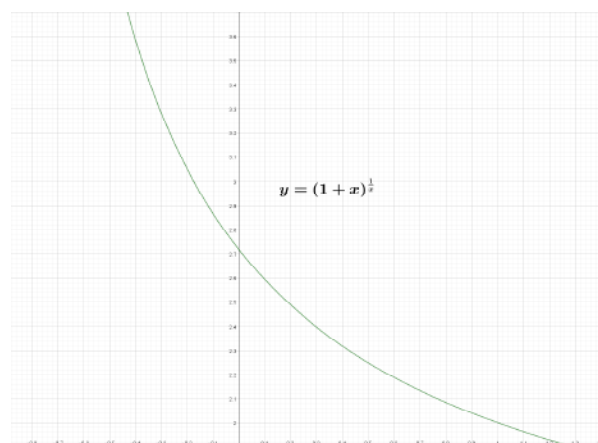
2 授業構想

○ $y = \log_a x$ の微分を考えさせる。定義を用いて

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log_a(x+h) - \log_a x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \log_a \left(1 + \frac{h}{x}\right) \end{aligned}$$

ここで、 $k = \frac{h}{x}$ とおくと、 $h \rightarrow 0$ のとき $k \rightarrow 0$ なので、

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{kx} \log_a(1+k) \\ &= \frac{1}{x} \lim_{k \rightarrow 0} \log_a(1+k)^{\frac{1}{k}} \end{aligned}$$



ここまで式変形させ、 $\lim_{k \rightarrow 0} (1+k)^{\frac{1}{k}}$ はどうなるか質問し、予想させる。不定形なので、収束、発散、どちらの意見

も考えられる。その後、geogebraで、 $y = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ のグラフを見せる。定義域は $x \neq 0$ だが、 $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$ が収束

することが直観的に理解させることができると思う。また、エクセルの計算機能を使って、 x が微小の時の $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ の値を示してもよいのではないかなと思う。

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1											
2											
3		右極限	x	0.1	0.01	0.001	0.0001	0.00001	0.000001	0.0000001	
4			$(1+x)^{(1/x)}$	2.593742	2.704814	2.716924	2.718146	2.718268	2.718280469	2.71828169	
5		左極限	x	-0.1	-0.01	-0.001	-0.0001	-0.00001	-0.000001	-0.0000001	
6			$(1+x)^{(1/x)}$	2.867972	2.731999	2.719642	2.718418	2.718295	2.718283188	2.71828196	
7											
8											

3 おまけ

$y = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ のグラフを見せることで、 $\lim_{x \rightarrow \infty} (1+x)^{\frac{1}{x}}$ が1に収束することも伝えられる。