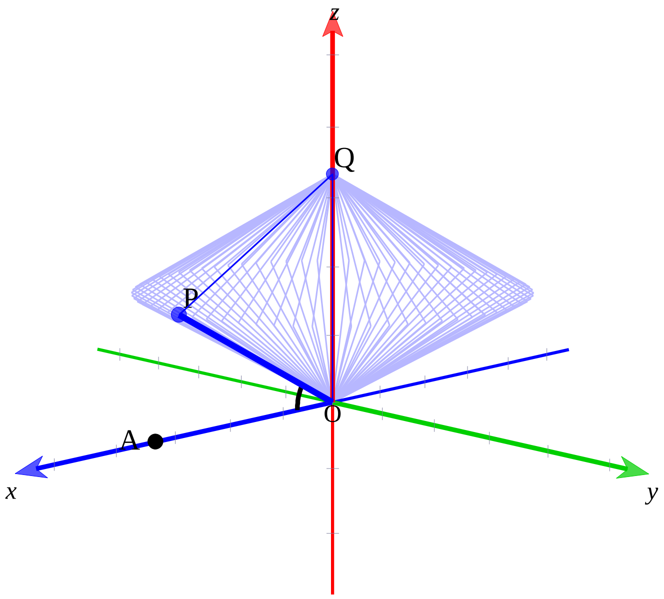
愛知県高等学校数学研究会
数学科教育情報委員会

2017 東京大学　理科【6】

点 O を原点とする座標空間内で、一辺の長さが 1 の正三角形 OPQ を動かす。また、点 A(1,0,0)に対して、∠AOP を θ とおく。ただし $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする。

(1) 点 Q が(0,0,1)にあるとき、点 P の x 座標が取りうる値の範囲を求めよ。

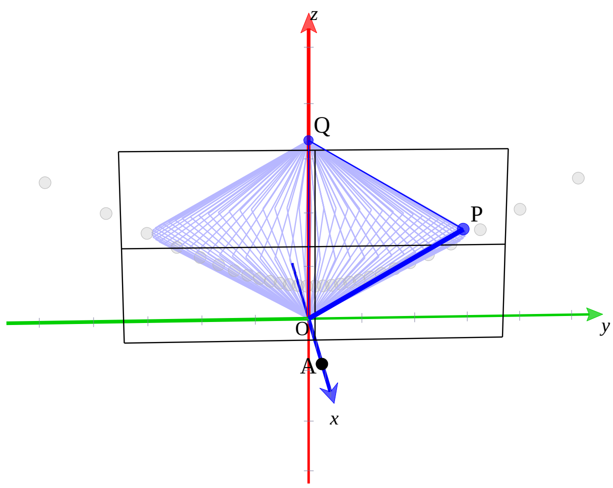
(2) 点 Q が平面 $x=0$ 上を動くとき、辺 OP が通過しうる範囲を K とする。K の体積を求めよ。

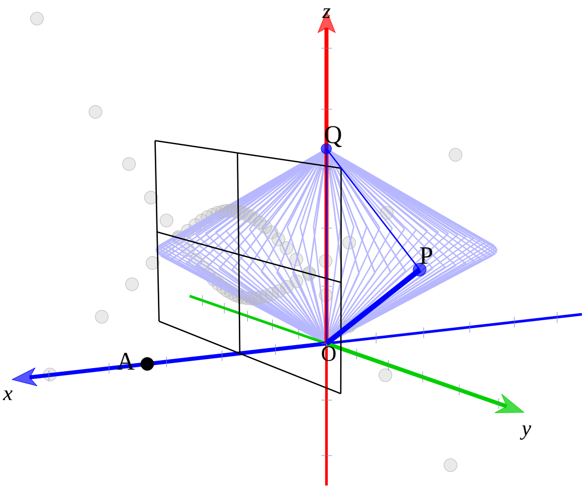


(1) においては三角形 OPQ の通過領域が円錐を重ねた形であることは容易に想像がつく。このとき点 P が$(\frac{\sqrt{3}}{2},0,\frac{1}{2})$のとき θ が最小であることも分かるが、それ以外の時どのようになるのか、実際に 3DGRAPES で見ることができる。

(2) における Kは、点 Q が yz 平面上の円 $y^2+z^2=1, x=0$ を動くことから、Kは (1) での辺 OP の通過する部分を x 軸の周りに回転させたものとなる.

OP の軌跡は円錐であるので、その切り口は母線に平行ではないとき双曲線の一部となる。実際に OP と平面 $x=t$ における交点の軌跡は双曲線となることも確認できる。K の体積はこの双曲線の一部 x 軸の周りに回転させたものを積分すれば求めることができる。





今回は OP の通過領域だけであったが、三角形 OPQ の通過領域と考えると切り口も双曲線も 2 つ合わせたものとなり x 軸から一番遠いところがどこになるか結構微妙になる。