

数Ⅲ【積分法】曲線の媒介変数表示、関数の増減と極値

2017 日本大学 医学部 (A方式) 【5】

曲線 $K \quad \begin{cases} x = 2\cos t + \cos 2t \\ y = 2\sin t - \sin 2t \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$ について、以下の問いに答えなさい。

(1) $0 \leq t \leq \frac{2}{3}\pi$ における曲線 K の長さを求めなさい。

(2) 円 $O : x^2 + y^2 = 3^2$ に 円 $C : (x-3)^2 + y^2 = 1$ が点(3, 0)で内接している。

この接点における円 C 上の点を P とする。円 C を円 O に内接させながら、すべらないように O を中心として反時計回りに回転させる。

このとき、点 P の動く軌跡は上の曲線 K に一致する。その理由を説明した以下の文章の空欄を適当な数式で補いなさい。

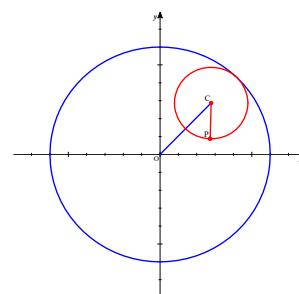
「簡単のため、 $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ で考える。円 C の中心を C とするとき、線分 OC と x 軸のなす角を t とする。

このとき、 \overrightarrow{CP} とベクトル $(1, 0)$ とのなす角は(ア)である。

よって、 $\overrightarrow{CP} = ((イ), (ウ))$ と表せる。

一方、 $\overrightarrow{OC} = ((エ), (オ))$ であるから、 $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CP}$ より、 K に一致することがわかる。」

(3) 曲線 K の概形を描きなさい。



設問に従って解いていけば、曲線 K の概形はイメージできてくる。自らの手で曲線 K の概形を描いた後、GRAPES を用いて円 C が回転する様子や点 C の軌跡を確認してみたい。

