愛知県高等学校数学研究会
数学科教育情報委員会

2017 岐阜大学　地域科学部・医学部（看護学科）・応用生物科学部

a を実数とする。 xy 平面上の曲線 C を $y=x^3+(a-4)x^2+(-4a+2)x-2$ とする。以下の問いに答えよ。

（1）曲線 C は, a の値に関係なく２定点を通る。その定点を A, B とするとき，点 A と点 B の座標を求めよ。

（2）曲線 C が点 A，点 B とは異なる点で線分 AB と交わる a の範囲を求めよ。

（3） a が（2）で求めた範囲にあるとき，線分 AB と曲線 C で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

（4）（3）の S について， S の最小値とそのときの a の値を求めよ。

まず(1)で C を a についての恒等式と考え，２定点 $A(0,-2), B(4,6)$ を求める。

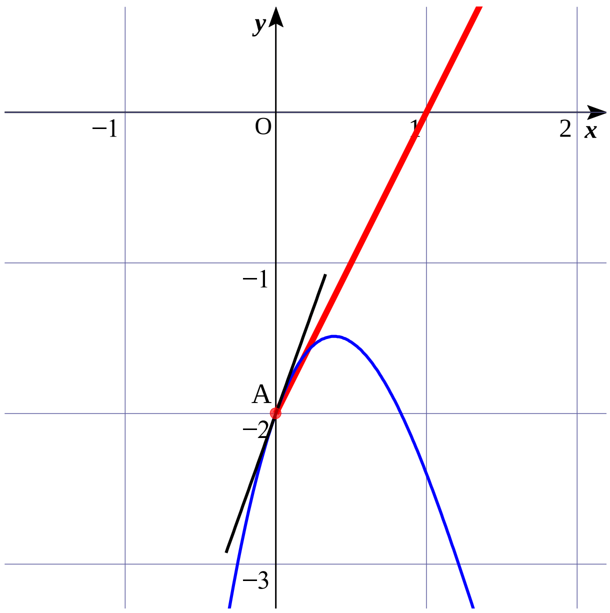
(2)では曲線 C と直線 AB，すなわち $y=2x-2$ が $0<x<4$ で解を持つ条件を考える。2つの式より y を消去すると $x^3+(a-4)x^2+(-4a+2)x-2=2x-2$ となり，この式を変形すると

$$x(x-4)(x+a)=0$$

となる。方程式の解は $x=0,4,-a$ となるから，条件より

$$0<-a<4 \quad \to \quad -4<a<0$$

この様子を Graepes で表示してみた。実際にグラフを書いてみると確かに $-4<a<0$ で条件を満たすようであるが, $a=0$ と $a=-4$ 付近の様子がわかりにくい。もちろんその部分だけを拡大して表示する方法もあるのだが，視点を変えて $x=0$ と $x=-4$（つまり点 A, B）における接線の傾きを表示してみた。



点 A における接線の傾きが直線の傾きより大きいとき，曲線 C と線分 AB が $0<x<4$ で交わっていることがわかる。