

## 図形描写を（生徒とともに）やってみよう

ここでは、京都大学の問題をイメージするために、geogebra を用いて描写する方法の一つの例を紹介します。生徒に行わせる場合の課題とその解決の流れを説明しているように書いてみました。後半は説明一辺倒になってしまふが、一度流れを試してから見ると、台本のように使ってもらえるかもしれません。

### 1 授業の狙い

図形を描写するという目標に向けての課題を発見・解決しながら数学的な見方や数学的な技能を養う。

### 2 推奨環境

生徒がコンピュータを扱える環境。計算機室など。タブレットを用いてのグループ活動も可能だが、数式の入力を考えるとキーボードが欲しい。

また、GeoGebra-Windows-Portable というソフトは、フォルダごとコピーすることでインストールせずに扱えるため、共有フォルダ等に格納しておいて、それぞれのコンピュータにコピーすることで使用可能。

### 3 授業の流れ（\_\_\_\_\_は生徒に気づいてほしい部分）

#### ① 問題の提示

$xyz$  空間ににおいて、平面  $y = z$  の中で

$$|x| \leq \frac{e^y + e^{-y}}{2} - 1, \quad 0 \leq y \leq \log a$$

で与えられる図形  $D$  を考える。ただし  $a$  は 1 より大きい定数とする。

この図形  $D$  を  $y$  軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。

課題 \_\_\_\_\_ 部の図形を描写してみよう。

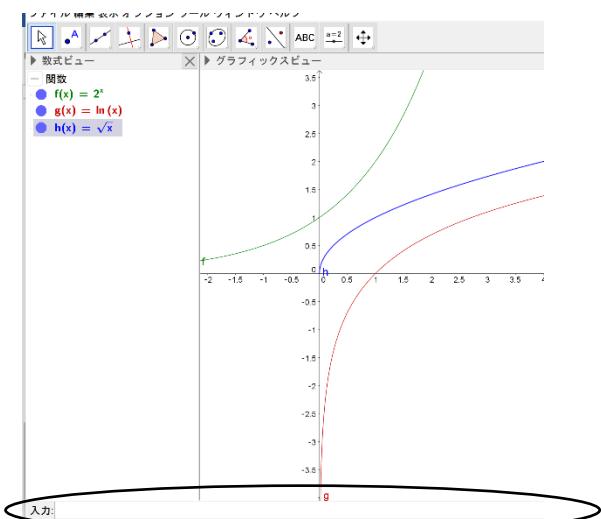
#### ② 課題解決のために・・・簡単な入力確認

$f(x) = 2^x, g(x) = \log x, h(x) = \sqrt{x}$  を表示してみる。

右図の入力欄に

$f(x)=2^x, g(x)=\log(x), h(x)=\sqrt{x}$  と入力

関数を扱う際の( )の入力には注意が必要。



③ 問題の式を入力してみよう。(絶対値と不等式についてはここでは無視)

上のことが分かっていれば入力可能。(分数は / で)

$x=(2^y+2^{-y})/2 - 1$  と入力。

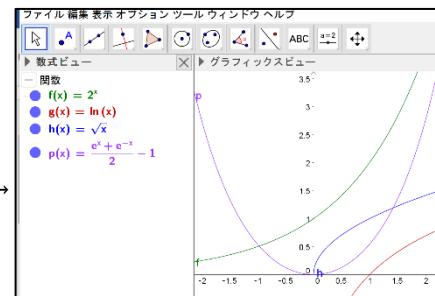
→エラーを吐きます(陽関数表示してくれという意味かと思う)

なぜいけないのか? 考えよう。試しに別の式を入れてみよう。

(おそらく x と y を入れ替える生徒が出る。これは表示される。) →

陽関数ではないと駄目らしい・・・。

(そのままでも考えられなくはないが) 陽関数の形に変形が必要。

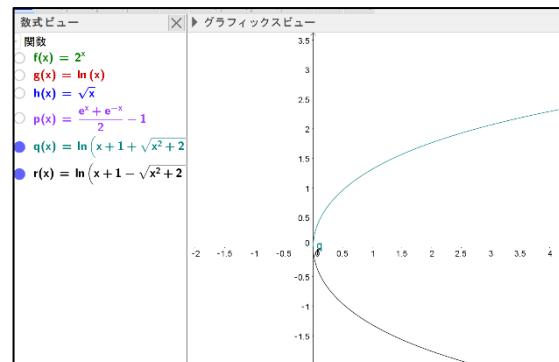


課題 与えられた式を  $y = \underline{\hspace{2cm}}$  の形にしよう。

$$\text{解: } y = \log(x + 1 \pm \sqrt{x^2 + 2x})$$

これをそれぞれ入力すると右のようになる。

入力は、  $y = \log(x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x})$



他の関数は邪魔なので消しちゃいましょう。

関数の横の●を押すと消えたり出たりします。

課題 絶対値のことを考慮しよう。

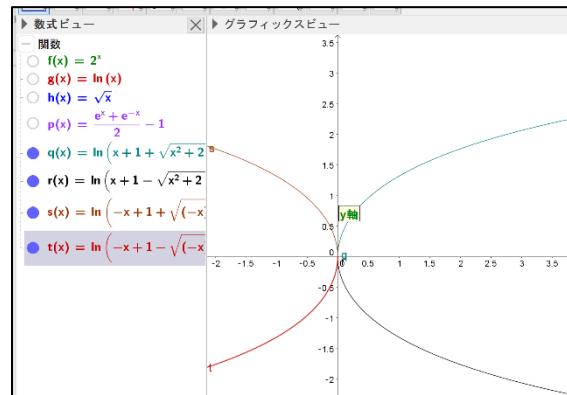
絶対値を考慮した図形を描くには?

→  $x$  を  $-x$  に置き換えた式をつくるだけ。

入力バーに  $q(-x)$ ,  $r(-x)$  と入れてみよう。

多分生徒は「おー!」って言います。

関数のありがたさが分かる瞬間ですね。



④ 空間に反映しよう。

問題は平面  $y=z$  の中でと言っているので,

空間上にのせなくてはいけません。

空間を考えるために、上の「表示」から

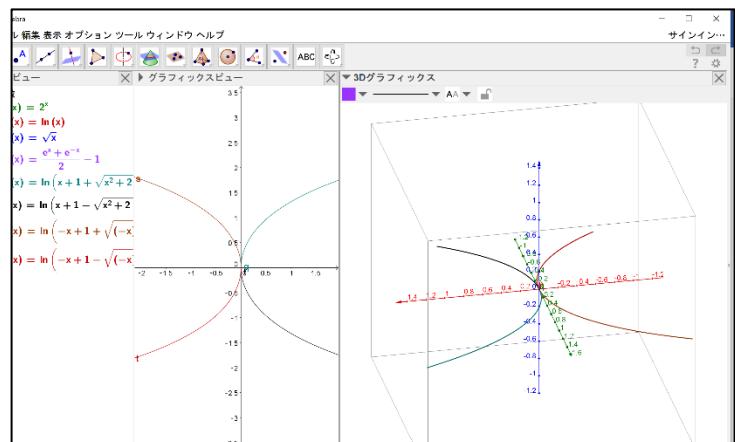
3D グラフィックスを選んでみましょう。

右のようになるはず。

(これまでの関数も図に出ています)

境界線をドラッグして表示範囲を

変えられます。



平面  $y = z$  を出して（普通に入力）3D をぐるぐる回すと雰囲気が出でてきます。

**課題 平面  $y = z$  の中でとは？**

y 座標と z 座標が同じなだけですね。これを反映させるために、パラメータを利用して図を描いてみましょう。

パラメータの曲線は、

**Curve[ x 座標, y 座標, z 座標, 媒介変数, 媒介変数の最小, 媒介変数の最大 ]**

と入力です。[]に注意！

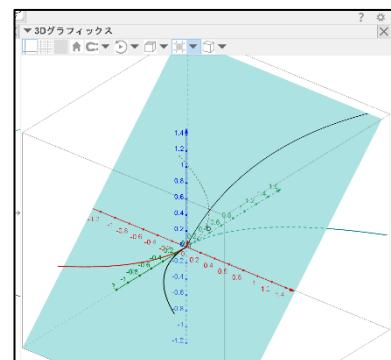
ここでは、パラメータ  $t$  で

0 から 10 くらいでやってみます。

**Curve[t, q(t), q(t), t, 0, 10]** と入力 →

$q(x)$  の部分だけ乗りました。他も同様に入力して全部出せるはずです。

(関数  $s$  と  $t$  のパラメータに注意)



3D Graphics window:

- Plane:  $a: y - z = 0$
- Curves (selected):
  - b:  $y = \ln(t + 1 + \sqrt{t^2 + 2t})$ ,  $z = q(t)$ ,  $x = t$ ,  $0 \leq t \leq 10$
  - c:  $y = \ln(t + 1 - \sqrt{t^2 + 2t})$ ,  $z = r(t)$ ,  $x = -t$ ,  $0 \leq t \leq 10$
  - d:  $y = \ln(-(-t) + 1 + \sqrt{(-(-t))^2 + 2(-(-t))})$ ,  $z = s(-t)$ ,  $x = -t$ ,  $0 \leq t \leq 10$
  - e:  $y = \ln(-(-t) + 1 - \sqrt{(-(-t))^2 + 2(-(-t))})$ ,  $z = t(-t)$ ,  $x = -t$ ,  $0 \leq t \leq 10$

Algebra View:

- Plane:  $a: y - z = 0$
- Functions:
  - $f(x) = 2^x$
  - $g(x) = \ln(x)$
  - $h(x) = \sqrt{x}$
  - $p(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} - 1$
  - $q(x) = \ln(x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x})$

さあ、雰囲気が出できました。

⑤ 不等式のことを考慮しよう。

不等式になっているのでその領域を考える必要があります。どこになるだろうか？

これは、生徒自身の考えで出てきてほしいところです。(領域は曲線 b と e の間)

(※ここから先は複雑かもしれません。)

領域を描くための工夫として、回転体をつくることも考慮しました。

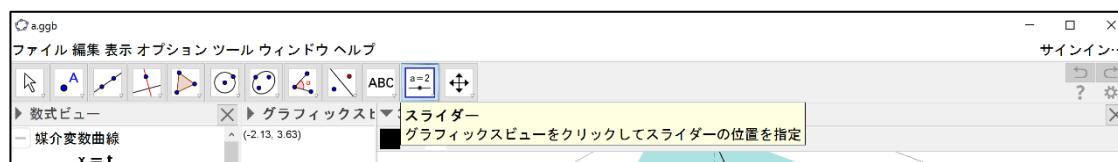
どうせ断面図を考えるので、y の値がそろっている線分を作つて、その軌跡を残像として表示してみます。

問題から  $y \geq 0$  なので扱うのは曲線 b と d だけで十分です。見づらければ c と e は消してしまいましょう。

y の値がそろっている線分を作るために、曲線上の動点を作ります。すでにできた関数とパラメータを利用して動点を作りましょう。

まずはパラメータの設定です。

グラフィックスビューを一度クリックして上のリボンの中にあるスライダーをクリック。



グラフィックスビューの中でもう一度クリックする設定できます。右のように設定すればいいかと。

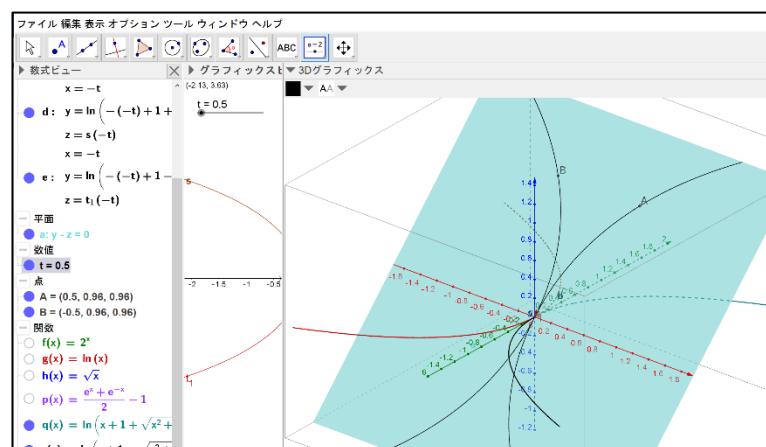


これでパラメータは作成完了。スライダーをいじる値を変えられます。

動点は簡単です。座標をいれるだけ。入力バーに  $(t, q(t), q'(t))$  でオッケーです。

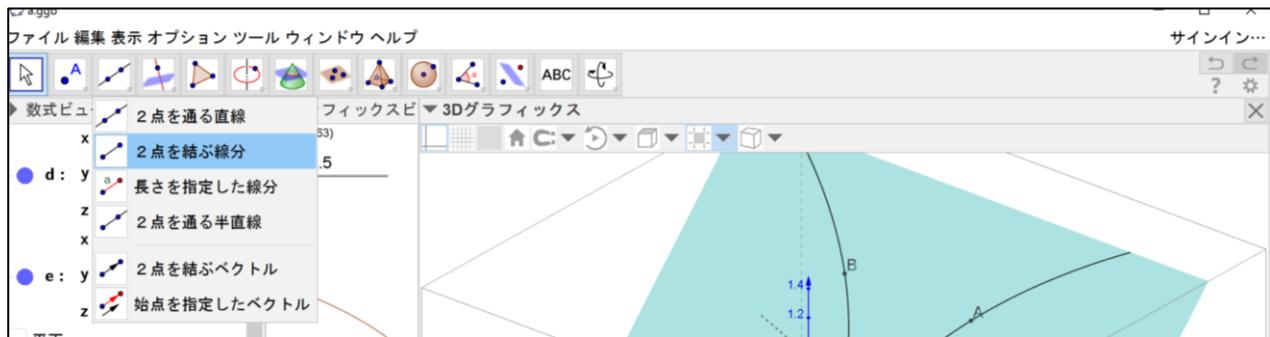
同様に曲線 d 上の点を作ります。パラメータに注意して  $(-t, s(-t), s'(-t))$  です。

これで曲線上をそろって動く 2 点 A, B が作されました。



線分 AB を作ります。

1 度 Esc を押してから、3D グラフィックスをクリックして上のリボンを見ます。その中の 2 点を通る直線の△から線分を選択。



その後 A と B を順にクリックするだけです。線分 i ができました。

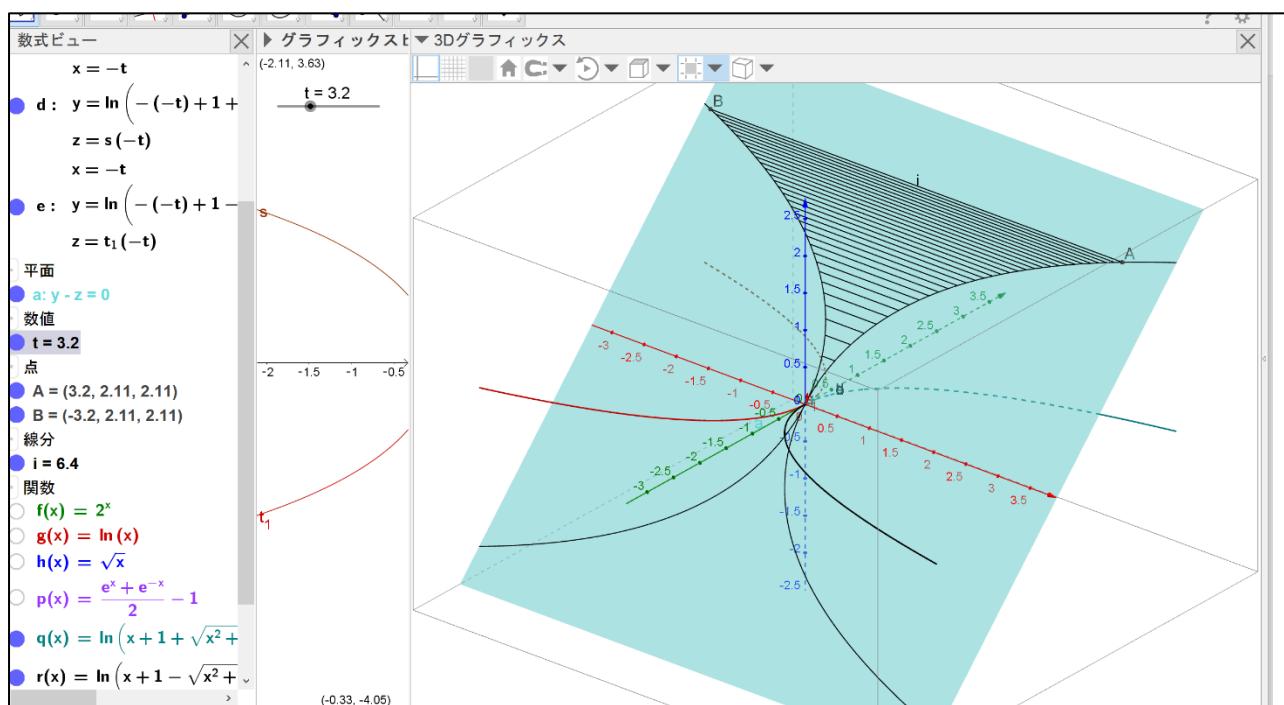
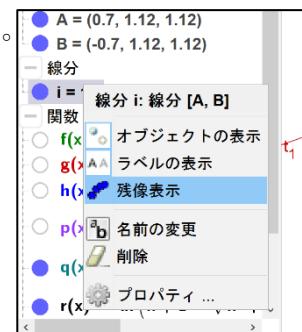
t のスライダーを動かすと、線分もセットで動きます。

ここで、線分に残像をつけます。

数式ビューにある線分 i を右クリックすると

残像という項目があるのでそこをチェック。

その後 t を動かすと・・・。



残像完成です。図形 D が分かりました。

グラフィックスの上でマウスのコロコロを動かすと縮尺が変えられます。

見やすいようにしてください。

また、右クリックで出るプロパティを利用すれば色も変えられますので好みで。

⑥回転させよう。

最後の閑門、回転です。y 軸回転ですが、この後 y 軸を選択しづらいので、y 軸と同じ直線を作つておきます。直線は **Line[ (1 つ目の点の座標), (2 つ目の点の座標) ]** です。

**Line[(0, 0, 0), (0, 1, 0)]** と入力しましょう。直線 j ができました。

さあ回転です！

回転角を変数にするため、先ほどと同じように、スライダーを作成しましょう。変数は a で十分です。

1 度 Esc を押してから、3D グラフィックスをクリックして上のリボンを見ます。その中の平面に関する鏡映から、直線の周りに回転を選択。



回したいもの→回転軸の順に選択です。

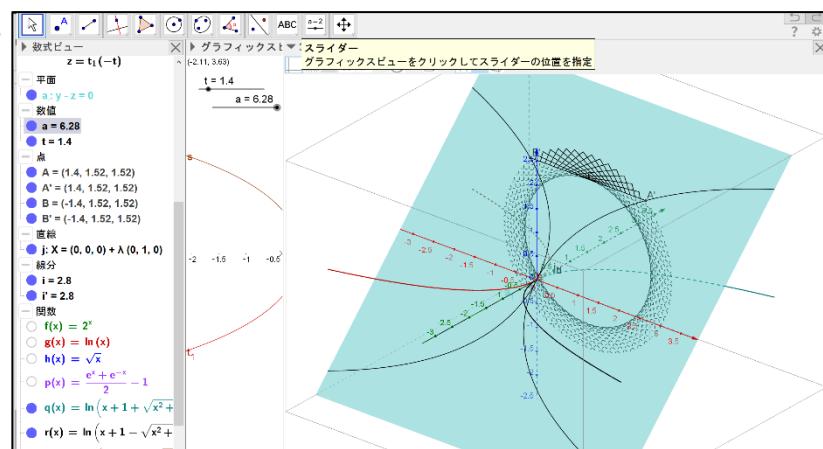
今回は線分 i → 直線 j です。

角度を聞かれるので変数 a を入力  
しましょう。線分 i' ができたはず  
です。これに残像をつけて、

a を動かすと・・・

回転体の断面の完成です！

この t と a を色々と変えることで  
回転体の全体像も見えてきます。



お疲れ様でした。

今回は、上のような過程で図形を描写させました。

生徒に取り組ませるには大変かもしれません、この過程を経験すると図形の見方や考え方には影響を与える可能性は大きいにあると感じています。生徒たちが考えるポイントも入れたつもりなので、1 部分だけでも切り取って試していただけるといいかもしれません。

また、これはフリーソフトなので、興味を持った生徒にはダウンロードをすすめ、後半部分を考えさせるということもできると思います。