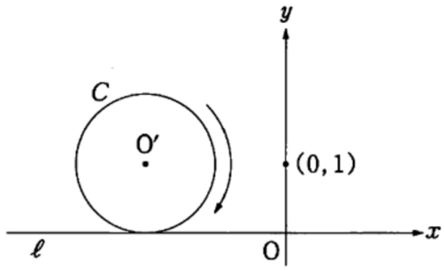
愛知県高等学校数学研究会
数学科教育情報委員会

2016 津田塾大学　学芸学部（数学科）【４】

座標平面の x 軸上に直線 l がある。点 O’を中心とする半径 1 の円 C が直線 l に接しながら x 軸の負の方向から正の方向へ，すべらずに転がっている。円 C は O’のまわりに毎秒 1 ラジアンの割合で回転しているとする。
ある時刻に点 O’が点 $(0,1)$ に達し，同時に直線 l が座標平面の原点 O を中心として毎秒 1 ラジアンの割合で正の向きに回転を始めた。その時刻に原点にある円 C 上の点を P とする。円 C はその後も l に接しながら同じように転がり続けるとする。

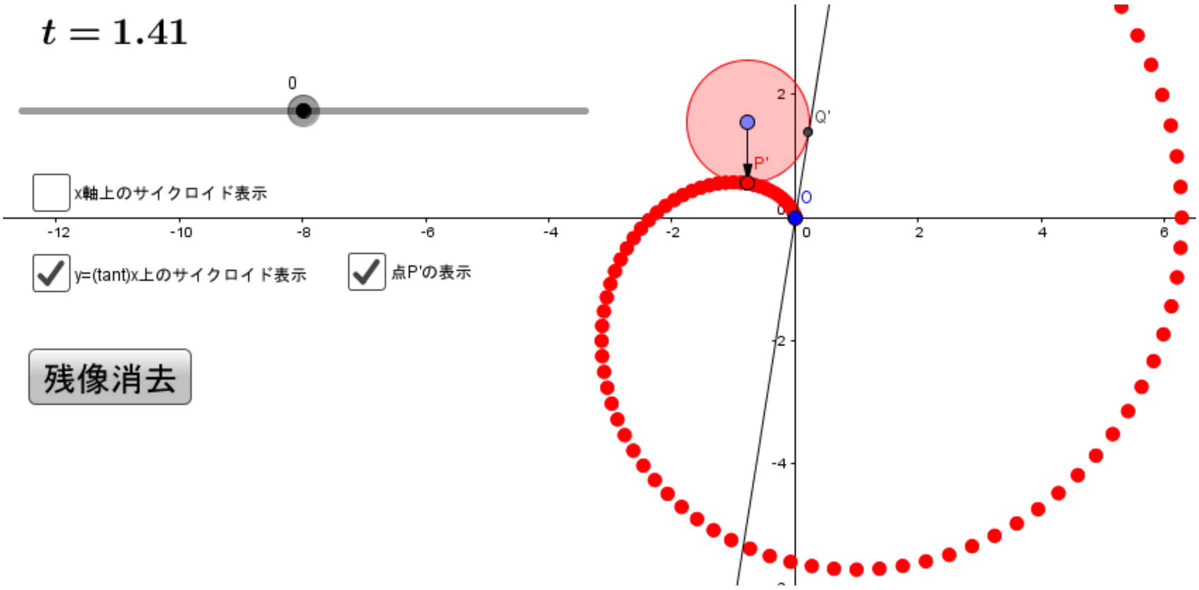


(1)　l が動き始めてから t 秒後 $(0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2})$ における円 C と直線 l の接点 Q の座標を求めよ。

(2)　l が動き始めてから t 秒後 $(0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2})$ における点 P の座標を求めよ。

(3)　l が動き始めてから $\dfrac{\pi}{2}$ 秒後までに点 P が描く曲線の長さを求めよ。

直線 l 上を円が転がるサイクロイドの問題であるが，同時に直線 l も回転する問題である。



条件から点 P は常に円の真下にくることが分かる。計算すれば $\mathrm{P}(t\cos t - \sin t,\ t\sin t + \cos t - 1)$ となるが，点 P の軌跡はインボリュート曲線と呼ばれる。インボリュート曲線：$\begin{cases} x = a(\cos\theta + \theta\sin\theta) \\ y = a(\sin\theta - \theta\cos\theta) \end{cases}$ は，

固定された円形リールに巻いた糸を弛まないようにほどいていくときの、糸の端点の軌跡である。
本問は糸の端点 O の方を固定し，円形リールを動かすことにより糸をほどいていくときの円形リールの（真下の点 P の）軌跡を考えているともいえる。