愛知県高等学校数学研究会
数学科教育情報委員会

2016 福島県立医科大学・医学部（前期）

$b(b>1)$ を実数とする。$A(1,0), B(0,b)$ を２つの頂点とする正方形 ABCD が xy 座標平面上にあり、点 $E(-1,0)$ と点 C を結んだ直線と y 軸の交点を F 、また、直線 CE と直線 AB の交点を G とする。ただし、正方形の頂点は $A\to B\to C\to D$ の順に時計回りにならんでいるものとする。

(1) 点 C と点 D の座標をそれぞれ b で表せ。

(2) 点 G の座標を b で表せ。

(3) ΔDFG の外接円の中心の座標を b で表せ。

(1) xy 平面を複素数平面としてみて、4 点 A,B,C,D を表す複素数をそれぞれ $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ とすると、$\alpha=1, \beta=bi$ である。$\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AD}$ はともに、$\overrightarrow{AB}$ を $-\dfrac{\pi}{2}$ 回転したものであるから、

$\gamma-\beta=\delta-\alpha=(\beta-\alpha)\times\left\{\cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)\right\}$ が成り立つ。よって

$\gamma=\beta-i(\beta-\alpha)=bi-i(bi-1)=b+(b+1)i$, $\delta=\alpha-i(\beta-\alpha)=1-i(bi-1)=b+1+i$ であるから、

点 C と点 D の座標はそれぞれ $(b,b+1),(b+1,1)$ である。

(2) $b>1$ に注意して、$CE: y=\dfrac{(b+1)-0}{b-(-1)}(x+1)$ より $y=x+1$ 、$AB: \dfrac{x}{1}+\dfrac{y}{b}=1$ より $y=-bx+b$ であり、この２直線の交点が G であるから、求める座標は $\left(\dfrac{b-1}{b+1},\dfrac{2b}{b+1}\right)$

(3) 点 F は直線 CE と y 軸との交点なので、その座標は $(0,1)$ である。ΔDFG の外接円の中心は線分 DF の垂直二等分線 l_1 と、線分 FG の垂直二等分線 l_2 の交点である。ここで、直線 FG の傾きは1であり、線分 FG の中点を M とすると、$\overrightarrow{OM}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{OF}+\overrightarrow{OG}\right)=\dfrac{1}{2(b+1)}\begin{pmatrix} b-1 \\ 3b+1 \end{pmatrix}$ であるから l_2 の方程式は

$y=-\left(x-\dfrac{b-1}{2(b+1)}\right)+\dfrac{3b+1}{2(b+1)}$ より

$y=-x+\dfrac{2b}{b+1}$ である。

また、l_1 の方程式は $x=\dfrac{b+1}{2}$ であるから、l_1 と l_2 の交点の座標を求めると

$\left(\dfrac{b+1}{2},-\dfrac{(b-1)^2}{2(b+1)}\right)$ である。