

2016 静岡大学 情報学部(情報科学科)・理学部(物理学科・化学科)・工学部【3】

- (1) 関数 $y = \frac{\log x}{x}$ ($x > 0$) の増減、凹凸を調べ、そのグラフの概形を書け。ただし、 \log は自然対数を表す。また、等式 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x} = 0$ は証明なしに用いてよい。
- (2) a を正の実数とする。このとき、 $a^x = x^a$ を満たす正の実数 x の個数を調べよ。
- (3) 定積分 $\int_1^{\sqrt{e}} \frac{\log x}{x} dx$ を求めよ。ただし、 e は自然対数の底である。

まず(1)で与えられた関数のグラフを書き、その結果を用いて(2)の答えを出す問題である。

(2)の解答を考えるために、Grapes で 2 種類のグラフを作成した。

1 つめは、(2)で与えられた左辺と右辺のグラフをそのまま描き、2 つのグラフの共有点を調べる、という方法である。この場合、考え方は直感的に理解できるが、実際にグラフを描いてみると、かなりわかりにくい面がある。

そこで、この問題の解法に沿い、(1)の結果を用いたのが 2 つめの方法である。 $a > 0, x > 0$ より

$$a^x = x^a \Leftrightarrow x \ln a = a \ln x \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x} = \frac{\ln a}{a}$$

となるため、2 つのグラフ $y = \frac{\log x}{x}$... ① と $y = \frac{\log a}{a}$... ② の共有点の個数が、与式の正の実数 x の個数と対応する。パラメータ a を変化させると、②のグラフ(赤線)が動き、①のグラフ(青線)との共有点の個数が一目瞭然である。また、(結果的に)赤い点の x 座標が a の値と一致するため、②のグラフの動きが直感的にわかりやすくなっている。

