

数Ⅲ 【積分法】体積

2015 九州大学 理系【3】

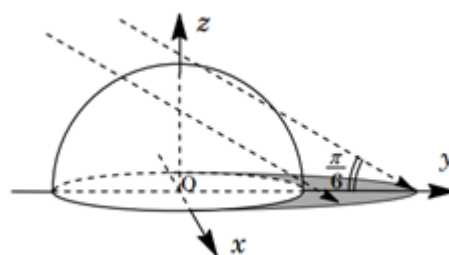
座標空間内に、原点  $O(0, 0, 0)$  を中心とする半径 1 の球

がある。右の概略図のように、 $y$  軸の負の方向から仰角  $\frac{\pi}{6}$

で太陽光線が当たっている。この太陽光線はベクトル  $(0, \sqrt{3}, -1)$  に平行である。球は光を通さないものとする。

以下の問いに答えよ。

- (1) 球の  $z \geq 0$  の部分が  $xy$  平面上につくる影を考える。 $k$  を  $-1 < k < 1$  を満たす実数とするとき、 $xy$  平面上の直線  $x = k$  において、球の外で光が当たらない部分の  $y$  座標の範囲を  $k$  を用いて表せ。
- (2)  $xy$  平面上において、球の外で光が当たらない部分の面積を求めよ。
- (3)  $z \geq 0$  において、球の外で光が当たらない部分の体積を求めよ。



$xy$  平面に置いてある半球面に、与えられた角度から光線を当てたときの影についての問題である。

(1), (2)で  $xy$  平面上にできる影を考え（境界は楕円となる）、(3)で空間上での影を考える。

コンピュータで表示すれば様々な方向から図を眺めることができ、問題のイメージをつかみやすい。今回は GeoGebra で作成した。パラメータの変化は「スライダー機能」、表示非表示の切替えは「チェックボックス機能」、簡単なスクリプトは「ボタン機能」を活用すると、（素材作成に手間がかかるが）操作が容易になる。

