数Ⅲ 【積分法】定積分で表された関数

2015 熊本大学　医学部【４】

rを正の実数とする．数列$\{a_n\}$を

$$a_n = \int_0^{n\pi} e^{-rx}|\sin x|\,dx \quad (n = 1,\ 2,\ 3 \ldots)$$

と定めるとき，次の問いに答えよ．

(1)　$a_{n+1} - a_n$を求めよ．

(2)　$\{a_n\}$の一般項を求めよ．

(3)　$\lim_{n\to\infty} a_n$を r を用いて表せ．

(4)　(3)で求めたrの式を$f(r)$とおく．$\lim_{r\to+0} rf(r)$を求めよ．

$$x = A\sin(\omega t + \alpha)\,,\quad \ldots①$$

で表される運動は，$x = -A$から$x = A$までの間を往復を繰り返す単振動である．単振動がみられる一例を挙げる．ばねの一端を固定し，他端におもりをつるすときいくらか伸びて，つりあったとする（この位置を原点とする）．これをもっと下に引っ張って放すとおもりは単振動を行なう．

次に，単振動を行なう質点に速度に比例した抵抗 $-\gamma dx/dt$ $(\gamma < \sqrt{4km}$とする$)$を受けるときを考える．質点の質量をm，つりあいの位置でのばねの張力をS_0とすると，運動方程式は，

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = mg - (S_0 + kx) - \gamma\frac{dx}{dt}\,,$$

となる．ここで，$S_0 = mg$であり，さらに$\mu = \gamma/2m$，$\omega = \sqrt{k/m}$とおくと，

$$\frac{d^2x}{d^2t} + 2\mu\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0\,.$$

これを解くと，

$$x = Ae^{-\mu t}\sin\left(\sqrt{\omega^2 - \mu^2}\,t + \alpha\right)\,.\quad \ldots②$$

$x(t)$は減衰振動関数であり、曲線は$x = Ae^{-\mu t}$と$x = -Ae^{-\mu t}$の２つの曲線の間を振動し，$x(t)$の振れの幅は時間とともに次第に小さくなる．これは，単振動を表す関数①に振れの幅が時間とともに減少するという状態を表現するために，$e^{-\mu t}$を掛けた関数であるとみることができる．

次に，質点の速度vは，

$$v = \frac{dx}{dt} = Be^{-\mu t}\sin\left(\sqrt{{\omega_0}^2 - \mu^2}\,t + \beta\right)\,,$$

となり，②と同一関数形になる．同様に，加速度も同様の関数形になる．これから，減衰振動関数が与えられたとき，時刻tにおける質点の位置を表す関数と解釈できるし，速度または加速度を表す関数とも解釈できる．

2015 年熊本大学医学部の入試問題に話しを戻す．被積分関数

$$e^{-rx}|\sin x| = |e^{-rx}\sin x|,$$

の絶対値の中身$e^{-rx}\sin x$（xを時間とみる）は②の減衰振動関数である．例えば，ばねの一端を固

定し，他端におもりをつるしたときの質点に，速さに比例する抵抗が作用するときの運動を表している関数であることが分かる．絶対値の中身$e^{-rx}\sin x$を質点の速度$v(x)$を表す関数とすると，被積分関数は時刻xにおける質点の速さを表す関数である．これより，時刻における位置は，

$$Ce^{-rx}\sin(x+\gamma)\,,$$

であり，rは減衰定数と解釈できる．また，$r<\omega$である．ここで，ωは角振動数であり，質点の質量m，ばね定数kにより定まる．

数列$\{a_n\}$は，

$$a_n=\int_0^{n\pi}|v(x)|\,dx\,,$$

と表せ，時刻0から$n\pi$の間に質点が動く道のりと解釈できる．また，(3)の極限は，

$$\int_0^{\infty}|v(x)|\,dx\,,\quad \ldots③$$

と表すことができ，時刻0から十分に時間が経過しているときの質点が動く道のりは，③に限りなく近づくと解釈できる．この極限値を$f(r)$とする．

$f(r)$をグラフに表すと，図１のようになる．

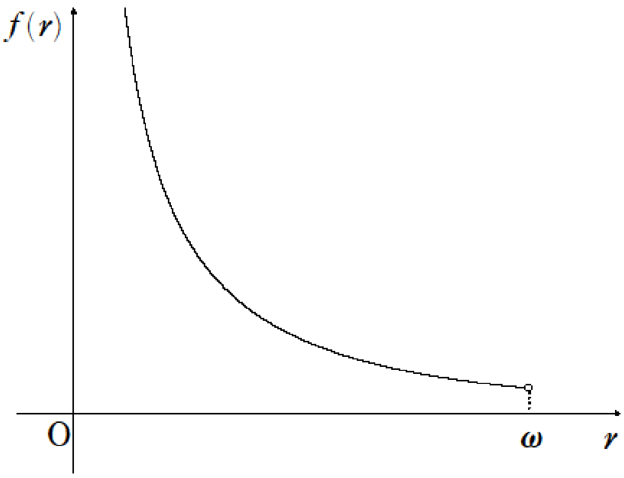

図1 「減衰定数と道のりの関係」

rを十分小さくすると，質点の運動は単振動に限りなく近づき，$f(r)$は十分大きな値になる．(4)より，

$$\lim_{r\to+0} rf(r),$$

が0以外の有限確定を示すことにより，

$$f(r)\sim\frac{1}{r}\ \ (r\to+0),$$

であることが分かる．

生徒に図１を見せ，$r\to+0$の$f(r)$の振る舞いを考える意義を考えさせたい．