愛知県高等学校数学研究会
数学科教育情報委員会

数Ⅲ 【微分法】微分法の不等式への応用

2015 新潟大学　理系【5】

自然数 n に対して，関数 $f_n(x)$ を次のように定める。

$$f_1(x)=1-\frac{x^2}{2}$$

$f_n(x)=\int_0^x f_{n-1}(t)dt$ （n が偶数のとき）　　$f_n(x)=1-\int_0^x f_{n-1}(t)dt$ （n が3以上の奇数のとき）

次の問いに答えよ。ただし必要があれば，$0<x\leqq 1$ のとき $x-\dfrac{x^3}{3!}<\sin x<x$ が成り立つことを用いてよい。

(1) 関数 $f_2(x)$，$f_3(x)$ を求めよ。

(2) $0\leqq x\leqq 1$ のとき，次の不等式が成り立つことを示せ。　$-\dfrac{x^4}{4!}\leqq f_1(x)-\cos x\leqq\dfrac{x^4}{4!}$

(3) $0\leqq x\leqq 1$ のとき，次の不等式　$-\dfrac{x^{2m+2}}{(2m+2)!}\leqq f_{2m-1}(x)-\cos x\leqq\dfrac{x^{2m+2}}{(2m+2)!}$
がすべての自然数 m に対して成り立つことを示せ。

(4) 極限値 $\displaystyle\lim_{m\to\infty} f_{2m-1}\left(\frac{\pi}{6}\right)$ を求めよ。

この問題は不等式を証明する形式だが，$f_n(x)$ を具体的に求めると

$$f_{2m-1}(x)=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots\cdots+(-1)^m\frac{x^{2m}}{(2m)!}\qquad f_{2m}(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots\cdots+(-1)^m\frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}$$

のようになる。$\cos x$，$\sin x$ のテイラー展開

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots\cdots$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots\cdots$$

が背景にある問題である。

GeoGebra にはテイラー展開のコマンドも用意されているので，今回はテイラー展開の収束の様子を表す教材を作成した。